2.3. Potęga, pierwiastek, logarytm

Niniejszy paragraf rozpoczniemy od definicji potęgi o wykładniku całkowitym.

Definicja 2.8. Potęgę a^n, której podstawa a jest dowolną liczbą rzeczywistą, a wykładnik potęgi n-dowolną liczbą naturalną, określamy wzorami

$$a^1 = a, \qquad a^{n+1} = a^n a \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

(określenie takie nosi nazwę definicji indukcyjnej).

Gdy $a \neq 0$, to określamy potęgi a^0, a^{-n} następującymi wzorami

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Z powyższej definicji dla potęg o wykładnikach całkowitych p i q zachodzą związki

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad \text{oraz} \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Następujące twierdzenie ustala istnienie n-tego pierwiastka z dodatnich liczb rzeczywistych.

Twierdzenie 2.7. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $x > 0$ i dowolnej liczby naturalnej n istnieje jedna i tylko jedna dodatnia liczba rzeczywista y taka, że $y^n = x$.*

Definicja 2.9. Liczbę y, o której mowa w powyższym twierdzeniu oznaczamy przez $\sqrt[n]{x}$ lub $x^{\frac{1}{n}}$ i nazywamy *pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n z liczby x*.

Wykorzystując Definicję 2.9 podamy teraz określenie potęgi o wykładniku wymiernym.

Definicja 2.10. Potęgę a^x, w której podstawa a jest liczbą dodatnią, a wykładnik x jest liczbą wymierną $\frac{l}{m}$, 0 lub $\frac{-l}{m}$, $(l, m \in \mathbb{N})$, określamy wzorami

$$a^{\frac{l}{m}} = (\sqrt[m]{a})^l, \quad a^0 = 1 \quad \text{oraz} \quad a^{\frac{-l}{m}} = \frac{1}{(\sqrt[m]{a})^l}.$$

Analogiczne związki jak dla potęg o wykładnikach całkowitych są prawdziwe dla potęg o wykładnikach wymiernych. Zauważmy jeszcze, że dla $a > 1$ potęga a^x rośnie wraz ze wzrostem wykładnika wymiernego x.

Przejdziemy teraz do określenia potęgi dowolnej, rzeczywistej, dodatniej liczby a, o dowolnym wykładniku rzeczywistym x.

Definicja 2.11. Rozważmy potęgi liczby a

$$a^b \quad \text{oraz} \quad a^{b'},$$

o wymiernych wykładnikach b i b', spełniających nierówność $b < x < b'$. *Potęgą* liczby $a > 1$ o wykładniku x nazywamy liczbę y zawartą między potęgami a^b i $a^{b'}$:

$$a^b < y < a^{b'}$$

i oznaczamy ją symbolem a^x. Dla $a < 1$ przyjmujemy

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Oczywiście liczba y, o której jest mowa w Definicji 2.11, istnieje i jest określona jednoznacznie.

Potęga o wykładniku rzeczywistym posiada wartość dodatnią. Dla dowolnych wykładników rzeczywistych zachodzą przy tym takie same związki jak dla wykładników całkowitych. Zauważmy jeszcze, że dla $a > 1$ potęga a^x rośnie wraz ze wzrostem wykładnika rzeczywistego x.

Podamy teraz proste, ale ważne twierdzenie zwane nierównością Bernoulliego, które dowodzi się przy wykorzystaniu zasady indukcji zupełnej.

Twierdzenie 2.8. *Niech γ będzie liczbą rzeczywistą większą od 1. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi $\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1)$.*

Przy pomocy potęgi o dowolnym wykładniku rzeczywistym zdefiniujemy logarytm dowolnej, dodatniej liczby rzeczywistej b, przy dodatniej podstawie a różnej od 1.

Rozważmy równanie $a^x = b$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Rozważmy kwestię istnienia rozwiązania tego równania. Wykorzystując powyższą nierówność Bernoulliego można udowodnić następujące

Twierdzenie 2.9. *Przy powyższych założeniach badane równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie względem x.*

W oparciu o powyższe twierdzenie możemy podać następującą definicję.

Definicja 2.12. *Logarytmem liczby $b > 0$ o podstawie $a > 0$ i $a \neq 1$* nazywamy dokładnie jedno rozwiązanie równania $a^x = b$. Oznaczamy je symbolem $\log_a b$.

Wiadomo, ze przy dowolnych a, b, c dodatnich, przy czym $c \neq 1$, mamy

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b, \quad \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b, \quad \log_c(a^b) = b \log_c a$$

oraz, jeśli $a \neq 1$, to

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$