Twierdzenie 8.9 (wzór Leibniza). *Przy powyższych założeniach prawdziwy jest następujący wzór*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k(x) g^{(n-k)}(x) \quad \textit{dla każdego } x \in A,$$

gdzie $f^{(0)} \equiv f$, $g^{(0)} \equiv g$.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem przybliżania funkcji w otoczeniu pewnego punktu przy pomocy wielomianu. Dokładniej, niech będzie dana funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$, mająca w punkcie $x_0 \in [a,b]$ wszystkie pochodne do rzędu n włącznie. Możemy formalnie napisać wielomian

$$P_n(x_0;x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

którego pochodne w punkcie x_0 do rzędu n włącznie (w tym $P_n^{(0)}(x_0;x_0) = P_n(x_0;x_0) = f(x_0)$), pokrywają się z pochodnymi odpowiedniego rzędu funkcji f w punkcie x_0.

Definicja 8.9. Algebraiczny wielomian określony powyższym wzorem nazywa się *wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie x_0.*

Oznaczmy $f(x) - P_n(x_0;x) = r_n(x_0;x)$. Wielkość tę nazywamy *resztą* lub, dokładniej, *n-tą resztą* we wzorze Taylora:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x).$$

Następujące twierdzenie podaje informację o reszcie w powyższym wzorze.

Twierdzenie 8.10 (Taylor). *Jeżeli na przedziale domkniętym o końcach x_0, x funkcja f jest ciągła razem ze swoimi pochodnymi do rzędu n włącznie, a w wewnętrznych punktach tego przedziału posiada ona pochodną rzędu $n+1$, to dla dowolnej funkcji φ ciągłej na tym przedziale i mającej różną od zera pochodną w jego wewnętrznych punktach, można znaleźć taki punkt $\xi \in (x_0, x)$, że*

$$r_n(x_0;x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi) n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Kładąc w powyższym wzorze $\varphi(x) = x - t$, otrzymujemy

$$r_n(x_0;x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Powyższy wzór nazywamy *resztą Cauchy'ego.*

Przy obliczaniu granic często bywa przydatne następujące

Twierdzenie 8.11 (reguła de l'Hospitala). *Niech funkcje $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne na przedziale (a,b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, przy czym $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a,b)$ oraz*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \textit{przy } x \to a+0 \quad (-\infty \leqslant A \leqslant +\infty).$$

Wówczas w każdym z dwóch przypadków:

1° *$f(x) \to 0$ i $g(x) \to 0$ przy $x \to a+0$,*

lub

2° *$g(x) \to +\infty$ przy $x \to a+0$,*

mamy

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{przy } x \to a+0.$$

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, gdy $x \to b-0$ lub gdy w 2° $g(x) \to -\infty$.

8.4. BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

Zajmiemy się wpierw warunkami monotoniczności funkcji różniczkowalnych.

Twierdzenie 8.12. *Między charakterem monotoniczności funkcji różniczkowalnej $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i znakiem jej pochodnej f' na tym przedziale zachodzą następujące związki:*
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest ściśle rosnąca $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$,
$f'(x) \geqslant 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0$,
$f'(x) = 0 \Rightarrow f$ jest funkcją stałą $\Rightarrow f'(x) = 0$,
$f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow f$ jest malejąca $\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$,
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest ściśle malejąca $\Rightarrow f'(x) \leqslant 0$
(w powyższych implikacjach warunki sformułowane przy pomocy pochodnej zachodzą dla każdego $x \in (a,b)$).

Ponadto, jeśli $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest różnowartościowa.

Wniosek 8.4. *Jeśli $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $f'(x) = g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$, to istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = g(x) + c$ dla każdego $x \in (a,b)$.*

Twierdzenie 8.13 (warunek dostateczny na istnienie ekstremum w terminach pierwszej pochodnej)**.** *Niech $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu x_0, ciągłą w tym punkcie i różniczkowalną w jego sąsiedztwie $S(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$. Niech $S_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ oraz $S_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x_0 < x\}$. Wówczas:*

(a) *jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in S_-(x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in S_+(x_0)$, to f nie posiada ekstremum w punkcie x_0;*

(b) *jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in S_-(x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in S_+(x_0)$, to f posiada w punkcie x_0 silne minimum lokalne (to znaczy $f(x) > f(x_0)$ dla pewnego otoczenia punktu x_0);*

(c) *jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in S_-(x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in S_+(x_0)$, to f posiada w punkcie x_0 silne maksimum lokalne;*

(d) *jeśli* $f'(x) > 0$ *dla każdego* $x \in S_-(x_0)$ *oraz* $f'(x) > 0$ *dla każdego* $x \in S_+(x_0)$*, to* f *nie posiada ekstremum w punkcie* x_0*.*

Twierdzenie 8.14 (warunek dostateczny na istnienie ekstremum w terminach pochodnych wyższych rzędów)**.** *Niech funkcja* $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ *określona w otoczeniu* $U(x_0)$ *punktu* x_0*, posiada w tym punkcie pochodne do rzędu* n *włącznie* ($n \geqslant 1$; *o* n*-tej pochodnej zakładamy ciągłość w punkcie* x_0).

Jeśli $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *i* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$*, to przy* n *nieparzystym w punkcie* x_0 *ekstremum nie ma, a przy* n *parzystym ekstremum jest, przy czym jest to silne minimum lokalne, jeśli* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, natomiast jeśli* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, to jest w tym punkcie osiągnięte silne maksimum lokalne.*

Podamy teraz określenie funkcji wypukłej oraz funkcji wklęsłej na pewnym przedziale.

Definicja 8.10. Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywa się *wypukła* na przedziale (a,b), jeśli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in (a,b)$ i dowolnych liczb $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, zachodzi nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Jeśli dla $x_1 \neq x_2$ i $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ powyższa nierówność jest ostra, to funkcja f nazywa się *ściśle wypukła* na przedziale (a,b).

Geometrycznie warunek ścisłej wypukłości funkcji $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oznacza, że punkty dowolnego łuku wykresu leżą pod sieczną przechodzącą przez końce tego łuku.

Definicja 8.11. Jeśli dla funkcji $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in (a,b)$ i dowolnych liczb $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$ takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, to mówimy, że funkcja f jest *wklęsła* na przedziale (a,b), lub częściej, że jest ona *wypukła w górę* na tym przedziale w odróżnieniu od funkcji *wypukłej*, którą wtedy nazywamy *wypukłą w dół* na tym przedziale.

Twierdzenie 8.15. *Na to, by różniczkowalna na przedziale* (a,b) *funkcja* f *o wartościach rzeczywistych była wypukła (w dół) na tym przedziale* (a,b)*, potrzeba i wystarcza, by jej pochodna* f' *była rosnąca na przedziale* (a,b)*. Przy tym ścisłemu wzrastaniu pochodnej* f' *odpowiada ścisła wypukłość funkcji* f*.*

Wniosek 8.5. *Na to, by funkcja* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$*, mająca drugą pochodną na przedziale* (a,b)*, była wypukła (w dół) na tym przedziale, potrzeba i wystarcza, aby* $f''(x) \geqslant 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$*. Jeśli* $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$*, to jest to warunek wystarczający dla ścisłej wypukłości funkcji* f*.*

Analogiczne twierdzenie oraz analogiczny wniosek do powyższych można podać dla funkcji wypukłej w górę.

Definicja 8.12. Niech $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w otoczeniu $U(x_0)$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$. Jeśli na zbiorze $S_-(x_0) = \{x \in U(x_0) | x < x_0\}$ funkcja jest wypukła w dół (w górę), a na zbiorze $S_+(x_0) = \{x \in U(x_0) | x_0 < x\}$ jest wypukła w górę (w dół), to punkt wykresu $(x_0, f(x_0))$ nazywa się jego *punktem przegięcia*.

Uwaga 8.2. (a) Jeśli funkcja $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz istnieje $f''(x_0)$ i punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia, to ponieważ $f'(x)$ posiada w punkcie x_0 maksimum lub minimum lokalne, zatem $f''(x_0) = 0$.

(b) Jeśli druga pochodna f'' jest określona w otoczeniu $U(x_0)$ i w $S_-(x_0)$ posiada ona jeden stały znak, a w $S_+(x_0)$- wszędzie znak przeciwny, to jest to warunek wystarczający na to, żeby $f'(x)$ w $S_-(x_0)$ i w $S_+(x_0)$ była monotoniczna, ale posiadała ona różny charakter monotoniczności w tych zbiorach. Wobec Twierdzenia 8.15, punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia.

Przy konstrukcji wykresów funkcji rzeczywistych użyteczne jest pojęcie asymptoty.

Definicja 8.13. Prosta $y = c_0 + c_1 x$ nazywa się *asymptotą* wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przy $x \to -\infty$ (lub przy $x \to +\infty$), jeśli

$$f(x) - (c_0 + c_1 x) \to 0 \quad \text{przy } x \to -\infty \quad (\text{lub przy } x \to +\infty).$$

Jeśli przy $x \to a - 0$ (lub przy $x \to a + 0$), $|f(x)| \to +\infty$, to jest jasne, że w tym przypadku wykres funkcji f, w miarę zbliżania się x do a, będzie coraz szybciej zbliżać się do prostej pionowej $x = a$. Tę prostą nazywamy *asymptotą pionową*, w odróżnieniu od asymptoty wprowadzonej powyżej, którą często nazywa się *asymptotą ukośną*.

Z powyższej definicji jest jasne, że $c_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $c_0 = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - c_1 x)$. Te wzory są słuszne również w przypadku, gdy $x \to +\infty$.

Na zakończenie niniejszego rozdziału zajmiemy się krótko różniczkowaniem funkcji o wartościach zespolonych.

Uwaga 8.3. (a) Definicja 8.1 może być zastosowana bez jakichkolwiek zmian w przypadku funkcji $f : A \to \mathbb{C}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$.

(b) Jeśli f_1 i f_2 są odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną funkcji f, to znaczy jeśli $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ dla $x \in A$, gdzie $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są funkcjami rzeczywistymi, to oczywiście

$$f'(x_0) = f_1'(x_0) + i f_2'(x_0),$$

przy czym f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne w tym punkcie.

(c) Definicja 8.1 może być również bez jakichkolwiek zmian zastosowana w przypadku funkcji $f\colon A \to \mathbb{C}$, gdzie $A \subset \mathbb{C}$.

Dodajmy, że funkcję $f\colon A \to \mathbb{C}$, gdzie $A \subset \mathbb{C}$, nazywamy *analityczną* w zbiorze A, jeśli posiada ona pochodną $f'(z)$ w każdym punkcie $z \in A$.