Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Marcin Borkowski

Przestrzenie metryczne hiperwypukłe i ich zastosowania w teorii punktu stałego

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab.
Ryszarda Urbańskiego

Poznań 2004

Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi Ryszardowi Urbańskiemu
oraz
Panu Doktorowi Dariuszowi Bugajewskiemu
za okazaną życzliwość
oraz wskazówki udzielone mi podczas pisania pracy.

Spis treści

Wstęp

Pojęcie przestrzeni metrycznej hiperwypukłej zostało po raz pierwszy zdefiniowane przez N. Aronszajna i P. Panitchpakdiego w pracy *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, opublikowanej w 1956 roku w *Pacific Journal of Mathematics* [1]. Praca ta jest poświęcona m.in. wykazaniu pewnej wersji twierdzenia Hahna–Banacha o rozszerzaniu. Okazuje się, że jeśli w klasycznym twierdzeniu Hahna–Banacha zastąpimy funkcjonały operatorami o wartościach w dowolnej przestrzeni Banacha, przestaje ono być prawdziwe; dowodzi się, że pozostaje ono słuszne, gdy ograniczymy się do rozważania operatorów o wartościach w tzw. przestrzeniach Hahna–Banacha. Przestrzenie te można zdefiniować nie odwołując się do ich struktury liniowej, a jedynie metrycznej, i przenosząc definicję na przestrzenie metryczne otrzymujemy definicję przestrzeni metrycznej hiperwypukłej. Oczywiście, w przypadku odwzorowań o wartościach w przestrzeni metrycznej nie można mówić o ich liniowości czy normie, ale dla odwzorowań ciągłych w sensie Lipchitza mamy analogon normy w postaci stałej Lipschitza odwzorowania. Aronszajn i Panitchpakdi pokazali, że odwzorowanie lipschitzowskie określone na podzbiorze przestrzeni metrycznej i o wartościach w przestrzeni hiperwypukłej można przedłużyć na całą przestrzeń z zachowaniem stałej Lipschitza (w istocie pokazali oni więcej, stosując ogólniejsze od stałej Lipschitza pojęcie modułu jednostajnej ciągłości i badając szerszą klasę odwzorowań niż lipschitzowskie).

Jakkolwiek hiperwypukłość jest pojęciem bardzo różnym od wypukłości, to jednak istnieją pewne analogie między nimi. Przykładem takiej analogii jest związek z retraktami: zarówno wypukłe podzbiory przestrzeni unormowanych, jak i przestrzenie metryczne hiperwypukłe są retraktami absolutnymi. (Nie jest to niespodzianką, jako że istnienie retrakcji jest równoważne z przedłużalnością odwzorowania identycznościowego, którą można wykazać korzystając ze wspomnianego twierdzenia typu Hahna–Banacha.) Druga ważna analogia jest związana z pojęciem powłoki wypukłej. Można się pokusić o zdefiniowanie analogicznego pojęcia powłoki hiperwypukłej podzbioru przestrzeni hiperwypukłej, choć jest to znacznie trudniejsze. Przyczyna trudności leży w tym, że w odróżnieniu od przypadku zbiorów wypukłych, przekrój rodziny zbiorów hiperwypukłych może nie być hiperwypukły. Okazuje się jednak, że przekrój *łańcucha* zbiorów hiperwypukłych zawsze ma tę własność (o ile nie jest pusty), zatem istnienie powłoki hiperwypukłej jest konsekwencją lematu Kuratowskiego–Zorna. (Oczywiście nie ma tutaj mowy o jednoznaczności; jest interesujące, że można wykazać jednoznaczność z dokładnością do izometrii oraz że dowód przebiega z zastosowaniem twierdzenia o punkcie stałym.) Można też pójść dalej i zdefiniować abstrakcyjną powłokę hiperwypukłą dowolnej przestrzeni metrycznej; opis takiego obiektu podał Isbell w 1964 roku w pracy *Six theorems about injective metric spaces* [13].

W roku 1978, niezależnie R. C. Sine [17] i P. Soardi [18] wykazali (choć nie stosowali jawnie pojęcia hiperwypukłości), że nierozszerzające odwzorowanie ograniczonej przestrzeni hiperwypukłej w siebie ma punkt stały; twierdzenie to w tej postaci zostało udowodnione w pracy J. B. Baillona *Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces*, opublikowanej w 1988 w *Contemporary Mathematics* [2]. Od tego czasu uzyskano liczne twierdzenia o punktach stałych w przestrzeniach hiperwypukłych. Wiele klasycznych rezultatów znanych z analizy wypukłej ma swoje hiperwypukłe odpowiedniki: dotyczy to np. twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, twierdzenia Darbo–Sadowskiego czy twierdzenia Möncha. Twierdzenia o punkcie stałym dla odwzorowań przestrzeni hiperwypukłych znajdują zastosowanie np. w teorii równań całkowych w przestrzeniach typu L^∞, które (przy pewnych założeniach co do miary) są hiperwypukłe.

Praca niniejsza podzielona jest na cztery rozdziały. W pierwszym rozdziale zebrano konwencje i oznaczenia przyjęte w całej pracy. Rozdział drugi jest poświęcony wprowadzeniu pojęcia i podstawowych własności przestrzeni metrycznych hiperwypukłych. W rozdziale trzecim zebrano twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni hiperwypukłych. Przykładowe zastosowanie twierdzenia o punkcie stałym w przestrzeniach hiperwypukłych do teorii równań całkowych jest treścią ostatniego, czwartego rozdziału.

Rozdział 1

Preliminaria

W całej pracy przyjęto następujące konwencje i oznaczenia.

Symbol $:=$ oznacza „równa się z definicji"; będzie on używany nie tylko w definicjach, ale i w rozumowaniach, aby podkreślić, że pewne równości wynikają wprost z definicji. Stosowany niekiedy zapis $y =: x$ jest oczywiście równoznaczny z $x := y$.

Zbiory oraz rodziny indeksowane zapisywane są w nawiasach klamrowych, np. $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\{x_i\}_{i \in I}$. Jeśli zbiór jest (przynajmniej częściowo) uporządkowany, to podkreślamy ten fakt stosując nawiasy trójkątne w miejsce klamrowych; w szczególności np. $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ oznacza ciąg, a $\langle x, y \rangle$ parę uporządkowaną.

Słowo „porządek" bez przymiotnika oznacza „częściowy porządek". Naturalnym porządkiem w rodzinach zbiorów jest inkluzja, zaś w rodzinach funkcji określonych na pewnym ustalonym zbiorze i o wartościach rzeczywistych relacja niewiększości punktowej. Będzie też zachodziła potrzeba rozpatrywania porządku w pewnych rodzinach odwzorowań posiadających różne dziedziny; porządek taki zostanie określony w definicji 2.2.2.

Nie odróżniamy w zapisie symbolicznym odwzorowań $T_1 \colon X \to Y_1$, $T_2 \colon X \to Y_2$, o ile $T_1(x) = T_2(x)$ dla $x \in X$. Jeśli jednak używamy określeń „homeomorfizm", „izometria", „identyczność", to zakładamy suriektywność odpowiedniego odwzorowania; w przeciwnym przypadku mówimy o „zanurzeniu" (homeomorficznym, izometrycznym, identycznościowym). Jeśli $T \colon X \to Y$ jest iniekcją, ale niekoniecznie suriekcją, to przez odwzorowanie odwrotne do T rozumiemy odwzorowanie $T^{-1} \colon T(X) \to X$ odwrotne w zwykłym sensie do bijekcji $T \colon X \to T(X)$. Dla odwzorowania $T \colon X \to X$ przez T^n rozumiemy n-krotne złożenie odwzorowania T ze sobą; w szczególności $T^1 := T$, a $T^0 := I_X$ jest identycznością na X.

Słowo „przestrzeń" oznacza przestrzeń metryczną, chyba że zaznaczono inaczej. Metrykę w przestrzeni X będziemy oznaczali przez d_X; zamiast $\langle X, d_X \rangle$ będziemy często pisać po prostu X. Kulę domkniętą w przestrzeni X o środku x i promieniu $r \geqslant 0$ oznaczamy przez $\bar{B}_X(x, r)$. Często będziemy pisać po prostu d, $\bar{B}(x, r)$ w miejsce d_X, $\bar{B}_X(x, r)$ itp.; jeśli będziemy stosowali np. to samo oznaczenie na metrykę w różnych przestrzeniach, z kontekstu będzie wówczas jednoznacznie wynikać, o jakiej przestrzeni mowa.

Przyjmujemy zwykłą umowę, że infimum zbioru nieograniczonego z dołu to $-\infty$, a pustego $+\infty$ i analogicznie dla supremum. Stosując zapis $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant y\}$, przyjmujemy *implicite*, że $-\infty < a < b < +\infty$.

Symbol typu $\sup f$ oznacza supremum wartości funkcji f po jej dziedzinie. Działania na funkcjach rzeczywistych i relacje między nimi należy rozumieć w sensie punktowym, np. gdy $f, g \colon X \to \mathbb{R}$, to $|f - g|$ jest funkcją przyporządkowującą punktowi $x \in X$ liczbę $|f(x) - g(x)|$, zaś zapis $f < g$ oznacza, że $f(x) < g(x)$ dla $x \in X$ (w szczególności, gdy $c \in \mathbb{R}$ jest stałą, zapis $f \leqslant c$ znaczy, że $f(x) \leqslant c$ dla $x \in X$; mówimy wówczas niekiedy o funkcji f, że jest „nieprzekraczająca” stałej c).

Litery i, j (być może z indeksami) oznaczać będą elementy zbioru wskaźników (zwykle I), z wyjątkiem przykładu 2.2.3, gdzie i oznacza po prostu jednostkę urojoną. Dla formalności będziemy zakładać, że jeśli wyraźnie nie zaznaczono, że jest inaczej, to zbiory indeksów I oraz Λ nie zawierają takich elementów, jak $0, 1, 2$ itp.; zatem np. dla dowolnego $i \in I$ mamy pewność, że A_i, A_0, A_1, A_2 itp. są parami różne.

Przez $\mathcal{C}(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, będziemy rozumieć przestrzeń Banacha ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na K ze zwykłą normą $\|\cdot\|_\infty$; gdy $K := [a, b]$ jest przedziałem prostej, będziemy pisać $\mathcal{C}[a, b]$ zamiast $\mathcal{C}([a, b])$. Symbolem $L^\infty[a, b]$ będziemy oznaczać przestrzeń Banacha (klas) funkcji istotnie ograniczonych określonych na przedziale $[a, b]$ i przyjmujących wartości rzeczywiste, z normą $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} f$. Elementy przestrzeni $L^\infty[a, b]$ będziemy tradycyjnie nazywać funkcjami i pisać np. $f(t)$ na oznaczenie wartości funkcji $f \in L^\infty[a, b]$ w punkcie t, pamiętając, że utożsamiamy funkcje równe prawie wszędzie. Oczywiście relacje mniejszości itd. w takich przestrzeniach również rozumiemy jako zachodzące prawie wszędzie.

Symbol $\int$ będzie zawsze oznaczał całkę Lebesgue'a. Zamiast „funkcje mierzalne w sensie Lebesgue'a” będziemy mówić krótko „funkcje mierzalne”; ponieważ nie będziemy rozważać innych σ-algebr (z wyjątkiem przykładu 2.1.2), nie doprowadzi to do niejednoznaczności.

Rozważając w rozdziale 4 równania całkowe, funkcję niewiadomą będziemy zawsze oznaczać literą x.

Rozdział 2

Przestrzenie hiperwypukłe

W paragrafie 2.1 zdefiniowano pojęcie przestrzeni hiperwypukłej, podano szereg przykładów takich przestrzeni oraz wykazano klasyczne twierdzenie Baillona o niepustości i hiperwypukłości przekroju łańcucha zbiorów hiperwypukłych. Paragraf 2.2 rozpoczyna się sformułowaniem znanego twierdzenia Hahna–Banacha, by przejść do dyskusji jego odpowiednika dla przestrzeni metrycznych wraz z twierdzeniem odwrotnym. Rozpoczęto także omawianie związku między przestrzeniami hiperwypukłymi a tzw. nierozszerzającymi retraktami absolutnymi. Paragraf 2.3 jest poświęcony pojęciu powłoki hiperwypukłej. Dowodzimy istnienia powłoki hiperwypukłej podzbioru przestrzeni hiperwypukłej oraz dowolnej przestrzeni metrycznej, a także omawiamy kilka własności tego pojęcia. Zaprezentowaną teorię stosujemy do pełnego scharakteryzowania przestrzeni hiperwypukłych w języku retraktów.

2.1. Podstawowe własności

Zdefiniujemy najpierw pojęcie przestrzeni metrycznej hiperwypukłej oraz podamy pewne jego własności.

Definicja 2.1.1. Przestrzeń metryczną $\langle X, d\rangle$ nazywamy *hiperwypukłą*, jeśli dla każdej rodziny kul domkniętych $\{\bar{B}(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ spełniającej warunek $d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$ przekrój $\bigcap_{i\in I} \bar{B}(x_i, r_i)$ jest niepusty.

Uwaga 2.1.1. Zauważmy, że warunek $d(x_1, x_2) \leqslant r_1 + r_2$ jest słabszy niż warunek $\bar{B}(x_1, r_1) \cap \bar{B}(x_2, r_2) \neq \emptyset$. Istotnie, wybierając $y \in \bar{B}(x_1, r_1) \cap \bar{B}(x_2, r_2)$ mamy $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, y) + d(y, x_2) \leqslant r_1 + r_2$. Dla dowodu, że implikacja w drugą stronę nie musi zachodzić, połóżmy $X := \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ze zwykłą metryką, $x_1 := 0$, $x_2 := 1$, $r_1 = r_2 := \frac{1}{2}$; wówczas $\bar{B}(x_1, r_1) \cap \bar{B}(x_2, r_2) = \emptyset$, mimo że $d(x_1, x_2) \leqslant r_1 + r_2$.

Oba warunki z uwagi 2.1.1 są w oczywisty sposób równoważne w tzw. przestrzeniach całkowicie wypukłych.

Definicja 2.1.2. Przestrzeń metryczną $\langle X, d\rangle$ nazywamy *całkowicie wypukłą*, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i takich $d_1, d_2 \geqslant 0$, że $d_1 + d_2 = d(x_1, x_2)$ istnieje $y \in X$ spełniające $d(x_1, y) = d_1$ i $d(x_2, y) = d_2$.

Uwaga 2.1.2. Wprost z definicji wynika, że każda przestrzeń hiperwypukła jest całkowicie wypukła.

Przykład 2.1.1. Prosta rzeczywista (z naturalną metryką), a także dowolny przedział domknięty są przestrzeniami hiperwypukłymi. Istotnie, w świetle powyższych rozważań wystarczy wykazać, że dowolna rodzina przedziałów domkniętych ograniczonych parami przecinających się ma niepusty przekrój (istotnie, kule domknięte w $\mathbb{R}$ to po prostu przedziały domknięte i ograniczone, zaś całkowita wypukłość $\mathbb{R}$ jest oczywista). Niech $\{[a_i, b_i]\}_{i\in I}$ będzie taką rodziną. Ponieważ dla dowolnych $i, j \in I$ mamy $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$, więc $a_i \leqslant b_j$ dla dowolnych $i, j \in I$; w szczególności zbiór $\{a_i\}_{i\in I}$ jest ograniczony z góry. Kładąc $a_0 := \sup_{i\in I} a_i$, mamy $a_i \leqslant a_0 \leqslant b_i$ dla dowolnego $i \in I$, więc $\bigcap_{i\in I}[a_i, b_i] \neq \emptyset$.

Kolejnych przykładów przestrzeni hiperwypukłych dostarcza następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.1. *Niech $\{\langle X_i, d_i\rangle\}_{i\in I}$ będzie rodziną przestrzeni hiperwypukłych. Wybierzmy punkt $a := \{a_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ oraz zdefiniujmy metrykę d na zbiorze $X := \{\{x_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} d_i(x_i, a_i) < \infty\}$ wzorem $d(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}) := \sup_{i\in I} d_i(x_i, y_i)$. Wówczas $\langle X, d\rangle$ jest przestrzenią metryczną hiperwypukłą.*

Dowód. Niech $\{x_i : i \in I\}, \{y_i : i \in I\} \in X$; mamy $d(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}) := \sup_{i\in I} d_i(x_i, y_i) \leqslant \sup_{i\in I}\big(d_i(x_i, a_i)+d_i(a_i, y_i)\big) < +\infty$; jest więc oczywiste, że funkcja d jest metryką. Zauważmy teraz, że dla dowolnych $x := \{x_i\}_{i\in I} \in X$ oraz $r > 0$ mamy $\bar{B}_X(x, r) = \prod_{i\in I} \bar{B}_{X_i}(x_i, r)$. Istotnie,

$$\begin{aligned}\bar{B}_X(x, r) &= \{\{y_i\}_{i\in I} \in X : d(x, y) \leqslant r\} = \\ &= \{\{y_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} d_i(y_i, a_i) < \infty,\ \sup_{i\in I} d_i(x_i, y_i) \leqslant r\} \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \{\{y_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} d_i(x_i, y_i) \leqslant r\} = \\ &= \prod_{i\in I}\{y_i \in X_i : d_i(x_i, y_i) \leqslant r\} = \\ &= \prod_{i\in I} \bar{B}_{X_i}(x_i, r),\end{aligned}$$

gdzie równość $(*)$ wynika stąd, że warunek $\sup_{i\in I} d_i(x_i, y_i) \leqslant r$ implikuje, że $\sup_{i\in I} d_i(y_i, a_i) \leqslant \sup_{i\in I}\big(d_i(y_i, x_i) + d_i(x_i, a_i)\big) < +\infty$.

Niech teraz $\{\bar{B}_X(x_\lambda, r_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, gdzie $x_\lambda = \{x_{\lambda,i}\}_{i\in I}$, będzie rodziną kul domkniętych w X, przy czym $d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \leqslant r_{\lambda_1} + r_{\lambda_2}$ dla $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Z powyższych rozważań wynika, że $\bar{B}_X(x_\lambda, r_\lambda) = \prod_{i\in I} \bar{B}_{X_i}(x_{\lambda,i}, r_\lambda)$, mamy zatem $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_X(x_\lambda, r_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \prod_{i\in I} \bar{B}_{X_i}(x_{\lambda,i}, r_\lambda) = \prod_{i\in I} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{X_i}(x_{\lambda,i}, r_\lambda)$; ponieważ dla dowolnych $j \in I$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ zachodzi $d_j(x_{\lambda_1,j}, x_{\lambda_2,j}) \leqslant \sup_{i\in I} d_i(x_{\lambda_1,i}, x_{\lambda_2,i}) \leqslant d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$, więc hiperwypukłość przestrzeni X_i dla $i \in I$ gwarantuje niepustość każdego z przekrojów $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{X_i}(x_{\lambda,i}, r_\lambda)$, co kończy dowód. □

Przykład 2.1.2. Niech $\#$ będzie miarą liczącą na σ-algebrze wszystkich podzbiorów niepustego zbioru Ω. Wówczas przestrzeń $l^\infty(\Omega, 2^\Omega, \#)$ rzeczywistych funkcji ograniczonych na Ω z klasyczną normą $\|\cdot\|_\infty$ jest hiperwypukła na mocy twierdzenia 2.1.1 przy $a := \{0\}_{\omega\in\Omega}$. W szczególności dla dwuelementowego zbioru Ω otrzymujemy hiperwypukłość płaszczyzny z metryką „maksimum".

Podamy teraz bez dowodu dwa twierdzenia dotyczące hiperwypukłości przestrzeni Banacha oraz pewną metodę konstrukcji przestrzeni metrycznych hiperwypukłych.

Twierdzenie 2.1.2. *Przestrzeń $L^\infty[a, b]$ funkcji istotnie ograniczonych na przedziale $[a, b]$ z miarą Lebesgue'a jest hiperwypukła.*

Twierdzenie 2.1.3. *Na to, aby przestrzeń Banacha E była hiperwypukła, potrzeba i wystarcza, aby była ona izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\mathcal{C}(K)$ funkcji ciągłych na pewnej przestrzeni topologicznej Hausdorffa całkowicie niespójnej i zwartej K.*

Definicja 2.1.3. Niech $C \subseteq X$ będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Mówimy, że C jest *zbiorem Czebyszewa* (*w przestrzeni* X), gdy dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki punkt $a \in C$, że $d(x, a) = \inf_{y\in C} d(x, y)$; punkt taki będziemy oznaczać przez x^p.

Twierdzenie 2.1.4. *Niech $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną, a C zbiorem Czebyszewa w X. Załóżmy, że d_C jest taką metryką na C, że przestrzeń $\langle C, d_C\rangle$ jest hiperwypukła. Określmy funkcję $d\colon X\times X \to [0, +\infty)$ wzorem*

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|, & \textit{gdy } x^p = y^p \textit{ oraz punkty } x, x^p, y \textit{ są współliniowe,} \\ \|x - x^p\| + d_C(x^p, y^p) + \|y^p - y\| & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas d jest metryką na X; co więcej, przestrzeń $\langle X, d\rangle$ jest hiperwypukła.

Przykłady 2.1.3. Niech $X := \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową. Określając $C := \{\langle 0, 0\rangle\}$ i stosując twierdzenie 2.1.4, wnosimy, że znana metryka „metra paryskiego" jest hiperwypukła. Gdy $C := \{\langle x, 0\rangle \in X : x \in \mathbb{R}\}$ oraz $d_C(\langle x, 0\rangle, \langle y, 0\rangle) := |x - y|$, twierdzenie 2.1.4 pozwala wywnioskować hiperwypukłość płaszczyzny z metryką „rzeka".

Twierdzenie 2.1.5. *Przestrzeń metryczna hiperwypukła jest zupełna.*

Dowód. Niech $\langle x_n\rangle_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni hiperwypukłej X. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie k_ε, że $d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$ dla $m, n \geqslant k_\varepsilon$. Połóżmy $\bar{B}_\varepsilon := \bar{B}(x_{k_\varepsilon}, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$; nietrudno zauważyć, że dla $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ mamy $d(x_{k_{\varepsilon_1}}, x_{k_{\varepsilon_2}}) \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Ponieważ X jest hiperwypukła, więc $A := \bigcap_{\varepsilon>0} \bar{B}_\varepsilon \neq \emptyset$. Oczywiście A jest zbiorem jednopunktowym, ponieważ gdyby $x, y \in A$ dla pewnej pary różnych punktów $x, y \in X$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ mielibyśmy $x, y \in \bar{B}_\varepsilon$, więc $d(x,y) \leqslant 2\varepsilon$ i wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymalibyśmy $x = y$ – sprzeczność. Niech $A = \{x\}$; wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$; wówczas dla $n \geqslant k_{\varepsilon/2}$ mamy $d(x_{k_{\varepsilon/2}}, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Jako że $x \in \bar{B}_{\varepsilon/2} := \bar{B}(x_{k_{\varepsilon/2}}, \frac{\varepsilon}{2})$, mamy też $d(x, x_{k_{\varepsilon/2}}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, zatem $d(x, x_n) \leqslant \varepsilon$, o ile $n \geqslant k_{\varepsilon/2}$, i dowód jest zakończony. □

Zdefiniujemy teraz kilka pojęć, które następnie wykorzystamy przy dowodzeniu niektórych twierdzeń o przestrzeniach hiperwypukłych i podamy pewne ich własności.

Definicje 2.1.4. Niech A będzie niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Dla dowolnego $x \in X$ oznaczmy $r_x(A) := \sup\{d(x,y) : y \in A\}$. *Promieniem zbioru* A (*względem* X) będziemy nazywali liczbę $r_X(A) := \inf\{r_x(A) : x \in X\}$. *Średnicę zbioru* A definiujemy wzorem $\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$. *Środkiem zbioru* A (*w* X) nazywamy zbiór $C_X(A) := \{x \in X : r_x(A) = r_X(A)\}$. Wreszcie, przez $\operatorname{cov}_X A$ będziemy rozumieć przecięcie wszystkich kul domkniętych w X zawierających A.

W przypadku, gdy nie będzie wątpliwości, w jakiej przestrzeni jest zanurzony zbiór A, będziemy pisać $r(A)$, $C(A)$ i $\operatorname{cov} A$ zamiast $r_X(A)$, $C_X(A)$ i $\operatorname{cov}_X A$ odpowiednio.

Uwaga 2.1.3. Nietrudno zauważyć, że $r_x(A) = \min\{r > 0 : A \subseteq \bar{B}(x,r)\}$ dla każdego $x \in X$. Istotnie, niech $r_0 := \inf\{r > 0 : A \subseteq \bar{B}(x,r)\}$. Jeśli $y \in A$ i $A \subseteq \bar{B}(x,r)$, to $d(x,y) \leqslant r$; biorąc infimum po takich $r > 0$, że $A \subseteq \bar{B}(x,r)$ i supremum po $y \in A$, otrzymujemy $r_x(A) \leqslant r_0$. Z drugiej strony, $A \subseteq \bar{B}(x, r_x(A))$ i stąd $r_0 \leqslant r_x(A)$ dla dowolnego $x \in X$. Aby wykazać, że infimum jest osiągane, wystarczy zauważyć, że dla dowolnego niepustego $D \subseteq [0, +\infty)$ mamy $\bigcap_{r\in D} \bar{B}(x,r) = \bar{B}(x, \inf D)$.

Lemat 2.1.6. *Niech A będzie niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Wówczas*

(1) $\operatorname{cov} A = \bigcap_{x\in X} \bar{B}(x, r_x(A))$;
(2) $r_x(\operatorname{cov} A) = r_x(A)$ *dla* $x \in X$;
(3) $r(\operatorname{cov} A) = r(A)$;
(4) $C(A) = \bigcap_{x\in A} \bar{B}(x, r(A))$.

Dowód. (1) Ponieważ $A \subseteq \bar{B}(x, r_x(A))$ dla każdego $x \in X$, więc $\operatorname{cov} A \subseteq \bigcap_{x\in X} \bar{B}(x, r_x(A))$. Z drugiej strony, gdy $A \subseteq \bar{B}(x,r)$ dla pewnego $x \in X$, wówczas $r_x(A) \leqslant r$ i stąd $\bar{B}(x, r_x(A)) \subseteq \bar{B}(x,r)$. Otrzymujemy zatem $\bigcap_{y\in X} \bar{B}(y, r_y(A)) \subseteq \bar{B}(x,r)$, o ile $A \subseteq \bar{B}(x,r)$, a więc $\bigcap_{y\in X} \bar{B}(y, r_y(A)) \subseteq \operatorname{cov} A$.

(2) Ustalmy $x \in X$. Ponieważ $\operatorname{cov} A = \bigcap_{z\in X} \bar{B}(z, r_z(A))$, więc warunek $y \in \operatorname{cov} A$ implikuje $y \in \bar{B}(x, r_x(A))$. Stąd $d(x,y) \leqslant r_x(A)$ dla dowolnego $y \in \operatorname{cov} A$, a zatem $r_x(\operatorname{cov} A) = \sup\{d(x,y) : y \in \operatorname{cov} A\} \leqslant r_x(A)$. Nierówność w przeciwną stronę jest oczywista.

(3) Wystarczy zastosować punkt (2) i definicję promienia zbioru.

(4) Oznaczmy dla wygody $C := \bigcap_{x\in A} \bar{B}(x, r(A))$. Niech $y \in C(A)$, czyli $r_y(A) = \sup\{d(x, y) : x \in A\} = r(A)$. To oznacza, że dla każdego $x \in A$ mamy $d(x, y) \leqslant r(A)$, a więc $y \in \bar{B}(x, r(A))$ i w konsekwencji $y \in C$. Wobec dowolności $y \in C(A)$ oznacza to, że $C(A) \subseteq C$. Niech teraz $y \in C$, czyli $d(x, y) \leqslant r(A)$ dla dowolnego $x \in A$. Biorąc supremum po $x \in A$ otrzymujemy $r_y(A) \leqslant r(A)$; nierówność przeciwna wynika wprost z definicji promienia zbioru. Skoro więc dla dowolnego $y \in C$ mamy $r_y(A) = r(A)$, musi być $y \in C(A)$, a zatem $C \subseteq C(A)$ i dowód jest zakończony. □

Lemat 2.1.7. *Niech A będzie niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni metrycznej hiperwypukłej X. Wówczas*

(1) $A \subseteq \bar{B}(x, \frac{1}{2} \operatorname{diam} A)$ *dla pewnego* $x \in X$;

(2) $r(A) = \frac{1}{2} \operatorname{diam} A$;

(3) $\operatorname{diam} \operatorname{cov} A = \operatorname{diam} A$;

(4) $C(A) \neq \emptyset$;

(5) *jeśli* $A \subseteq C(A)$*, to* A *jest zbiorem jednopunktowym*;

(6) *jeśli* Y *jest niepustym i hiperwypukłym podzbiorem przestrzeni* X *oraz* $A \subseteq Y$ *jest niepusty i ograniczony, to* $C_Y(A) = C_X(A) \cap Y$.

Dowód. (1) Rozważmy rodzinę kul $\{\bar{B}(a, \frac{1}{2} \operatorname{diam} A)\}_{a\in A}$. Dla $a, b \in A$ mamy $d(a, b) \leqslant \operatorname{diam} A$, a zatem przekrój $\bigcap_{a\in A} \bar{B}(a, \frac{1}{2} \operatorname{diam} A)$ jest niepusty. Niech x należy do tego przekroju; wówczas $d(x, a) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} A$ dla każdego $a \in A$, czyli $A \subseteq \bar{B}(x, \frac{1}{2} \operatorname{diam} A)$.

(2) Z punktu (1) oraz uwagi 2.1.3 wynika natychmiast, że $r(A) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} A$. Dla dowodu nierówności w przeciwną stronę zauważmy, że dla $a, b \in A$ oraz $x \in X$ mamy $d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(b, x) \leqslant 2r_x(A)$; wystarczy więc wziąć supremum po $a, b \in A$ i infimum po $x \in X$.

(3) Teza wynika z punktu (2) i z punktu (3) lematu 2.1.6.

(4) Zauważmy, że dla $x, y \in A$ zachodzi $d(x, y) \leqslant \operatorname{diam} A = 2r(A)$. Wystarczy teraz zastosować wzór z punktu (4) lematu 2.1.6 i skorzystać z hiperwypukłości X.

(5) Załóżmy dla dowodu nie wprost, że A zawiera przynajmniej dwa punkty; wówczas $\operatorname{diam} A > 0$. Niech $x, y \in A$ będą takimi punktami, że $d(x, y) > \frac{1}{2} \operatorname{diam} A$. Mamy $y \in \bar{B}(x, r_x(A)) = \bar{B}(x, r(A)) = \bar{B}(x, \frac{1}{2} \operatorname{diam} A)$, gdzie pierwsza równość wynika z założenia, że $x \in A \subseteq C(A)$, a druga z punktu (2). Wykazaliśmy więc, że $d(x, y) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} A$ – sprzeczność.

(6) Z definicji środka zbioru oraz z własności (2) (zastosowanej do A jako podzbioru najpierw X, a następnie Y) wynika, że $C_X(A) \cap Y = \{x \in X : r_x(A) = r_X(A)\} \cap Y = \{x \in Y : r_x(A) = \frac{1}{2} \operatorname{diam} A\} = \{x \in Y : r_x(A) = r_Y(A)\} = C_Y(A)$. □

Uwaga 2.1.4. Można zadać pytanie, czy własność podana w punkcie (1) lematu 2.1.7 charakteryzuje przestrzenie hiperwypukłe, tj. czy jeśli każdy niepusty i ograniczony podzbiór A pewnej przestrzeni metrycznej X zawiera się w pewnej kuli domkniętej o promieniu równym $\frac{1}{2} \operatorname{diam} A$, to pociąga to za sobą hiperwypukłość przestrzeni X. Odpowiedź jest pozytywna, o ile ograniczymy się do klasy przestrzeni Banacha (zob. [7]), i negatywna w ogólnym przypadku przestrzeni metrycznych (zob. [4, Appendix]). Dla klas przestrzeni metrycznych takich, jak przestrzenie całkowicie wypukłe czy ściśle wypukłe (zdefiniowane w [11]) pytanie to pozostaje otwarte.

Pozostała część niniejszego paragrafu jest poświęcona głównie wykazaniu twierdzenia Baillona o niepustości przekroju łańcucha zbiorów hiperwypukłych ograniczonych. Ma ono istotne znaczenie dla dalszej części pracy, bowiem pozwala udowodnić istnienie tzw. powłoki hiperwypukłej podzbioru przestrzeni hiperwypukłej w tej przestrzeni. Aby umotywować to twierdzenie, zauważmy, że przekrój nawet skończenie wielu zbiorów hiperwypukłych może nie być hiperwypukły, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 2.1.4. Rozważmy płaszczyznę $X := \mathbb{R}^2$ z metryką „maksimum". Zdefiniujmy $A := \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$, ustalmy $\alpha \in [0,1]$ i określmy

$$H_\alpha := \{\langle x_1, x_2\rangle \in X : x_1 \in [0, \tfrac{1}{2}], x_2 = \alpha x_1 \text{ lub } x_1 \in [\tfrac{1}{2}, 1], x_2 = \alpha(1 - x_1)\}.$$

Rozważmy odwzorowanie $i\colon H_\alpha \to [0,1]$ dane wzorem $i(\langle x_1, x_2\rangle) := x_1$. Jest jasne, że i jest suriekcją; pokażemy, że jest też izometrią. Niech $x := \langle x_1, x_2\rangle, y := \langle y_1, y_2\rangle \in H_\alpha$. Zauważmy, że $|y_2 - x_2| \leqslant |y_1 - x_1|$. Faktycznie, gdy np. $x_1, y_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, to $|y_2 - x_2| = |\alpha y_1 - \alpha x_1| \leqslant |y_1 - x_1|$; gdy $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ i $y_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$, to mamy $2x_1 \leqslant 1$ oraz $2y_1 \geqslant 1$ i stąd $x_2 - y_2 = \alpha x_1 - \alpha(1-y_1) = \alpha(x_1+y_1-1) \leqslant x_1+y_1-1 \leqslant y_1-x_1 \leqslant |y_1-x_1|$ oraz $y_2 - x_2 = \alpha(1-y_1) - \alpha x_1 = \alpha(1-y_1-x_1) \leqslant 1-y_1-x_1 \leqslant y_1-x_1 \leqslant |y_1-x_1|$ i w rezultacie $|y_2 - x_2| \leqslant |y_1 - x_1|$; w pozostałych przypadkach rozumujemy analogicznie. Stąd $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = |x_1 - y_1| = d(i(x), i(y))$. Odcinek $[0,1]$ jest hiperwypukły (zob. przykład 2.1.1), więc to samo dotyczy każdego zbioru H_α, jako przestrzeni z nim izometrycznej. Zauważmy teraz, że $H_0 \cap H_1 = A$; zbiór ten nie jest oczywiście całkowicie wypukły, więc tym bardziej nie może być hiperwypukły.

Zanim sformułujemy i udowodnimy twierdzenie Baillona w całej ogólności, zdefiniujemy pewien szczególny typ zbiorów hiperwypukłych, dla których jego dowód jest niemal natychmiastowy.

Definicja 2.1.5. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Niepusty podzbiór $A \subseteq X$ nazywamy *dopuszczalnym* (*w przestrzeni* X), jeśli jest on przekrojem pewnej rodziny kul domkniętych w X. Klasę wszystkich podzbiorów dopuszczalnych w przestrzeni X oznaczamy przez $\mathcal{A}(X)$.

Uwaga 2.1.5. Zauważmy, że wprost z definicji wynika, że przekrój zbiorów dopuszczalnych jest dopuszczalny, o ile nie jest pusty.

Lemat 2.1.8. *Niech X będzie przestrzenią metryczną hiperwypukłą.*

(1) *Dopuszczalny podzbiór przestrzeni X jest hiperwypukły.*

(2) *Przekrój łańcucha dopuszczalnych podzbiorów X jest dopuszczalny.*

Dowód. (1) Załóżmy, że zbiory indeksów I oraz J są rozłączne. Niech $A = \bigcap_{j\in J} \bar{B}_X(x_j, r_j) \in \mathcal{A}(X)$. Niech $\{\bar{B}_A(x_i, r_i)\}_{i\in I} \subseteq A$ będzie taką rodziną kul domkniętych w A, że $d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$. Z niepustości A oraz stąd, że $x_i \in \bar{B}_X(x_j, r_j)$ dla dowolnych $i \in I$, $j \in J$ wynika, że $d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I \cup J$; ponieważ X jest hiperwypukła, otrzymujemy stąd $\bigcap_{i\in I} \bar{B}_A(x_i, r_i) = A \cap \bigcap_{i\in I} \bar{B}_X(x_i, r_i) = \bigcap_{i\in J} \bar{B}_X(x_i, r_i) \cap \bigcap_{i\in I} \bar{B}_X(x_i, r_i) = \bigcap_{i\in I\cup J} \bar{B}_X(x_i, r_i) \neq \emptyset$.

(2) Niech $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ będzie łańcuchem zbiorów dopuszczalnych w X, przy czym $A_\lambda = \bigcap_{i\in I_\lambda} \bar{B}_X(x_{\lambda,i}, r_{\lambda,i})$ dla $\lambda \in \Lambda$. Wystarczy udowodnić, że $A := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{i\in I_\lambda} \bar{B}_X(x_{\lambda,i}, r_{\lambda,i}) \neq \emptyset$. Wybierzmy $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ oraz $i_1 \in I_{\lambda_1}$, $i_2 \in I_{\lambda_2}$. Ponieważ $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest łańcuchem, więc $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}$ lub $A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1}$; niech na przykład $A_{\lambda_1} \subseteq A_{\lambda_2}$. Mamy zatem $A_{\lambda_1} \subseteq \bar{B}_X(x_{\lambda_2,i_2}, r_{\lambda_2,i_2})$; ale również $A_{\lambda_1} \subseteq \bar{B}_X(x_{\lambda_1,i_1}, r_{\lambda_1,i_1})$ i stąd $\bar{B}_X(x_{\lambda_1,i_1}, r_{\lambda_1,i_1}) \cap \bar{B}_X(x_{\lambda_2,i_2}, r_{\lambda_2,i_2}) \neq \emptyset$. Wobec dowolności $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ oraz $i_1 \in I_{\lambda_1}$, $i_2 \in I_{\lambda_2}$ oraz hiperwypukłości X otrzymujemy $A \neq \emptyset$. □

Możemy teraz wykazać twierdzenie Baillona w pełnej ogólności.

Twierdzenie 2.1.9. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $\{X_i\}_{i\in I}$ łańcuchem niepustych i hiperwypukłych podzbiorów X, z których przynajmniej jeden jest ograniczony. Wówczas $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*

Dowód. Zauważmy wpierw, że bez straty ogólności możemy założyć, że wszystkie zbiory X_i są ograniczone. Istotnie, niech X_{i_0} będzie ograniczony i niech $I_0 := \{i \in I : X_i \subseteq X_{i_0}\}$. Wówczas $\{X_i\}_{i\in I_0}$ jest łańcuchem hiperwypukłych i ograniczonych podzbiorów X o tym samym przekroju, co $\{X_i\}_{i\in I}$.

Wprowadzimy pewne oznaczenia. Zamiast $X_j \subseteq X_i$, gdzie $i, j \in I$, będziemy pisali krótko $i \preccurlyeq j$; z taką relacją zbiór I jest całkowicie uporządkowany, a $\langle X_i\rangle_{i\in I}$ jest zstępującą rodziną indeksowaną zbiorów. Dla $i \in I$ oraz $A \subseteq X$ połóżmy $\operatorname{cov}_i A := \bigcap_{x\in X_i} \bar{B}_X(x, r_x(A))$; zauważmy, że na ogół $\operatorname{cov}_i A \neq \operatorname{cov}_{X_i} A$, natomiast zawsze $\operatorname{cov}_{X_i} A = X_i \cap \operatorname{cov}_i A$. Ponadto operacja $A \mapsto \operatorname{cov}_i A$ jest izotoniczna, tj. $\operatorname{cov}_i A \subseteq \operatorname{cov}_i B$ dla $A \subseteq B$, co wynika z definicji cov_i i r_x, oraz $\operatorname{cov}_i(\operatorname{cov}_i A) = \operatorname{cov}_i A$, co wynika z równości $r_x(\operatorname{cov}_i A) = r_x(A)$ dla $x \in X$ (jej dowód nie różni się od dowodu punktu (2) lematu 2.1.6).

Rozważmy następującą rodzinę podzbiorów produktu $\prod_{i\in I} X_i$:

$$\Sigma := \{\prod_{i\in I} \hat{A}_i \subseteq \textstyle\prod_{i\in I} X_i : \hat{A}_i \in \mathcal{A}(X_i) \text{ dla } i \in I,\ \hat{A}_j \subseteq \hat{A}_i \text{ dla } i \preccurlyeq j\},$$

częściowo uporządkowaną przez inkluzję. (Zauważmy, że $\emptyset \notin \Sigma$, co wynika z definicji zbioru dopuszczalnego.) Rodzina ta jest niepusta, ponieważ $\prod_{i\in I} X_i \in \Sigma$. Wykażemy, że w Σ istnieje element minimalny. Niech $\{\hat{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ będzie łańcuchem w Σ, przy czym $\hat{A}_\lambda = \prod_{i\in I} \hat{A}_{\lambda,i}$ dla $\lambda \in \Lambda$. Połóżmy $\hat{A} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{A}_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \prod_{i\in I} \hat{A}_{\lambda,i} = \prod_{i\in I} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{A}_{\lambda,i}$. Oznaczając $\hat{A}_i := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{A}_{\lambda,i}$ dla $i \in I$ otrzymujemy $\hat{A} = \prod_{i\in I} \hat{A}_i$. Z punktu (2) lematu 2.1.8 wynika, że zbiory $\hat{A}_i$ są dopuszczalne dla $i \in I$. Ponadto dla $i \preccurlyeq j$ mamy $\hat{A}_{\lambda,j} \subseteq \hat{A}_{\lambda,i}$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$ i stąd $\hat{A}_j = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{A}_{\lambda,j} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{A}_{\lambda,i} = \hat{A}_i$. Okazuje się zatem, że $\hat{A} \in \Sigma$; ponadto jest widoczne, że $\hat{A}$ jest ograniczeniem dolnym łańcucha $\{\hat{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Z lematu Kuratowskiego–Zorna wynika więc, że w Σ istnieje element minimalny $\widetilde{A} = \prod_{i\in I} \widetilde{A}_i$.

Ustalmy $j_0 \in I$ i zdefiniujmy $\widetilde{A}_1 \in \Sigma$ wzorem $\widetilde{A}_1 := \prod_{i\in I} \widetilde{A}_{1,i}$, gdzie

$$\widetilde{A}_{1,i} := \begin{cases} \operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0} \cap \widetilde{A}_i & \text{dla } i \preccurlyeq j_0, \\ \widetilde{A}_i & \text{dla } i \not\preccurlyeq j_0. \end{cases}$$

Aby wykazać, że $\widetilde{A}_1 \in \Sigma$, zauważmy wpierw, że $\widetilde{A}_{j_0} \subseteq \widetilde{A}_i$ dla $i \preccurlyeq j_0$ i stąd $\operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0} \cap \widetilde{A}_i \neq \emptyset$; oczywiście $\widetilde{A}_{1,i}$ jest przecięciem kul dla każdego $i \in I$. Dalej, dla $i \preccurlyeq j$ mamy $\widetilde{A}_{1,j} \subseteq \widetilde{A}_{1,i}$. (Istotnie, zachodzi jeden z przypadków: $j_0 \prec i \preccurlyeq j$, $i \preccurlyeq j \prec j_0$, $i \preccurlyeq j_0 \preccurlyeq j$. W dwóch pierwszych powyższa inkluzja jest oczywista, zaś w trzecim wynika z równości $\operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0} \cap \widetilde{A}_{j_0} = \widetilde{A}_{j_0}$.) Mamy zatem $\widetilde{A}_1 \in \Sigma$ oraz $\widetilde{A}_1 \subseteq \widetilde{A}$; z minimalności $\widetilde{A}$ wynika, że $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}$. W szczególności dla $i \preccurlyeq j_0$ otrzymujemy $\operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0} \cap \widetilde{A}_i = \widetilde{A}_i$, czyli zachodzą inkluzje $\widetilde{A}_{j_0} \subseteq \widetilde{A}_i \subseteq \operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0}$. Stąd i z wspomnianych własności operacji cov_i wnioskujemy, że $\operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0} \subseteq \operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_i \subseteq \operatorname{cov}_{j_0} \widetilde{A}_{j_0}$; wobec dowolności j_0 mamy więc $\operatorname{cov}_j \widetilde{A}_j = \operatorname{cov}_j \widetilde{A}_i$, o ile $i \preccurlyeq j$. Wynika stąd między innymi, że $r_x(\widetilde{A}_j) = r_x(\widetilde{A}_i)$ dla $i \preccurlyeq j$ oraz $x \in X_j$. (Faktycznie, ponieważ $\widetilde{A}_j \subseteq \widetilde{A}_i$, więc $r_x(\widetilde{A}_j) \leqslant r_x(\widetilde{A}_i)$. Gdyby $r_x(\widetilde{A}_j) < r_x(\widetilde{A}_i)$ dla pewnego $x \in X_j$, wówczs istniałoby takie $y \in \widetilde{A}_i$, że $d(x, y) > r_x(\widetilde{A}_j)$. Ale wówczas $y \notin \bar{B}_X(x, r_x(\widetilde{A}_j))$, więc tym bardziej $y \notin \operatorname{cov}_j \widetilde{A}_j := \bigcap_{x\in X_j} \bar{B}_X(x, r_x(\widetilde{A}_j))$. Jednocześnie $y \in \widetilde{A}_i \subseteq \operatorname{cov}_j \widetilde{A}_i$ – sprzeczność.) W konsekwencji $r_{X_j}(\widetilde{A}_j) := \inf_{x\in X_j} r_x(\widetilde{A}_j) = \inf_{x\in X_j} r_x(\widetilde{A}_i) \geqslant \inf_{x\in X_i} r_x(\widetilde{A}_i) =: r_{X_i}(\widetilde{A}_i)$ dla $i \preccurlyeq j$. Z drugiej strony, skoro $i \preccurlyeq j$, więc $\widetilde{A}_j \subseteq \widetilde{A}_i$, zatem $r_{X_j}(\widetilde{A}_j) = \frac{1}{2} \operatorname{diam} \widetilde{A}_j \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} \widetilde{A}_i = r_{X_i}(\widetilde{A}_i)$; otrzymujemy zatem równość $r_{X_i}(\widetilde{A}_i) = r_{X_j}(\widetilde{A}_j)$ dla $i \preccurlyeq j$. Możemy zatem oznaczyć przez r wspólną wartość promienia każdego ze zbiorów $\widetilde{A}_i$ względem X_i, gdzie $i \in I$.

Zdefiniujmy teraz zbiór $\widetilde{A}_2 \in \Sigma$ wzorem $\widetilde{A}_2 := \prod_{i\in I} \widetilde{A}_{2,i}$, gdzie $\widetilde{A}_{2,i} := C_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{A}_i)$ dla $i \in I$. Niepustość zbiorów $\widetilde{A}_{2,i}$, gdzie $i \in I$, wynika z punktu (4) lematu 2.1.7 zastosowanego do $\widetilde{A}_i$ jako całej przestrzeni. To, że każdy zbiór $\widetilde{A}_{2,i}$ $(i \in I)$ jest przecięciem kul w X_i, jest konsekwencją punktu (6) lematu 2.1.7 z X_i w miejsce X oraz $\widetilde{A}_i$ w miejsce A i Y oraz wzoru (4) lematu 2.1.6. Niech wreszcie $i \preccurlyeq j$, wówczas $\widetilde{A}_j \subseteq \widetilde{A}_i$ i w konsekwencji $\widetilde{A}_{2,j} := C_{\widetilde{A}_j}(\widetilde{A}_j) = C_{X_j}(\widetilde{A}_j) \cap \widetilde{A}_j = \{x \in \widetilde{A}_j : r_x(\widetilde{A}_j) = r\} = \{x \in \widetilde{A}_j : r_x(\widetilde{A}_i) = r\} \subseteq \{x \in \widetilde{A}_i : r_x(\widetilde{A}_i) = r\} = C_{X_i}(\widetilde{A}_i) \cap \widetilde{A}_i = C_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{A}_i) =: \widetilde{A}_{2,i}$. Wykazaliśmy więc, że $\widetilde{A}_2 \in \Sigma$; ale wprost z definicji $\widetilde{A}_2 \subseteq \widetilde{A}$, więc wobec minimalności $\widetilde{A}$ mamy $\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}$. Zatem dla dowolnego $i \in I$ mamy $\widetilde{A}_i = C_{\widetilde{A}_i}(\widetilde{A}_i)$, czyli na mocy punktu (5) lematu 2.1.7 każdy ze zbiorów $\widetilde{A}_i$ jest jednopunktowy. Korzystając z faktu, że $\widetilde{A}_j \subseteq \widetilde{A}_i$ dla $i \preccurlyeq j$ oraz zapisując $\widetilde{A}_i = \{x_i\}$, $\widetilde{A}_j = \{x_j\}$, otrzymujemy równość $x_i = x_j$; wobec dowolności i, j

wynika stąd, że istnieje takie $x_0 \in X$, że $\widetilde{A}_i = \{x_0\}$ dla każdego $i \in I$, czyli w szczególności $x_0 \in \bigcap_{i\in I} X_i$ i dowód jest zakończony. $\square$

Uwaga 2.1.6. Założenie ograniczoności w twierdzeniu 2.1.9 jest istotne. Kładąc bowiem np. $X := \mathbb{R}$, $I := \mathbb{N}$ oraz $X_i := [i, +\infty)$ otrzymujemy $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset$, mimo że $\{X_i\}_{i\in I}$ jest łańcuchem niepustych i hiperwypukłych podzbiorów X.

Okazuje się, że możemy zastosować powyższe twierdzenie do wykazania nie tylko niepustości, lecz także hiperwypukłości przekroju łańcucha zbiorów hiperwypukłych. Jest interesujące i – jak zobaczymy – ważne dla zastosowań, że wówczas możemy opuścić założenie ograniczoności.

Wniosek 2.1.10. *Niech $\{X_i\}_{i\in I}$ będzie takim łańcuchem hiperwypukłych podzbiorów przestrzeni metrycznej X, że przekrój $\widetilde{X} := \bigcap_{i\in I} X_i$ jest niepusty. Wówczas $\widetilde{X}$ jest hiperwypukły.*

Dowód. Niech $\{\bar{B}_{\widetilde{X}}(x_\lambda, r_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ będzie taką rodziną kul domkniętych w $\widetilde{X}$, że $d(x_\lambda, x_\mu) \leqslant r_\lambda + r_\mu$ dla $\lambda, \mu \in \Lambda$. Z hiperwypukłości X_i dla $i \in I$ otrzymujemy, że $A_i := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{X_i}(x_\lambda, r_\lambda) \neq \emptyset$. Zauważmy, że dla każdego $i \in I$ zbiór A_i jest ograniczony i hiperwypukły (jako dopuszczalny podzbiór przestrzeni hiperwypukłej X_i); ponadto wprost z definicji wynika, że $A_i \subseteq A_j$, o ile $X_i \subseteq X_j$. Zatem $\{A_i\}_{i\in I}$ jest łańcuchem niepustych, ograniczonych i hiperwypukłych podzbiorów X; na mocy twierdzenia 2.1.9 przekrój $\bigcap_{i\in I} A_i$ jest niepusty. Ale $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{X_i}(x_\lambda, r_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{i\in I} \bar{B}_{X_i}(x_\lambda, r_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{\widetilde{X}}(x_\lambda, r_\lambda)$, a więc przecięcie $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{B}_{\widetilde{X}}(x_\lambda, r_\lambda)$ jest niepuste; to zaś oznacza hiperwypukłość $\widetilde{X}$. $\square$

Wniosek 2.1.11. *Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni hiperwypukłej X. Wówczas A posiada minimalny (w sensie inkluzji) hiperwypukły nadzbiór w X.*

Dowód. Rozważmy rodzinę $\Sigma := \{H \subseteq X : A \subseteq H, H \text{ hiperwypukły}\}$, uporządkowaną przez relację inkluzji. Oczywiście $X \in \Sigma$, więc $\Sigma \neq \emptyset$. Z wniosku 2.1.10 wynika, że każdy łańcuch w Σ ma ograniczenie dolne; na mocy lematu Kuratowskiego–Zorna istnieje zatem w Σ element minimalny. $\square$

2.2. Rozszerzanie odwzorowań jednostajnie ciągłych

Celem niniejszego paragrafu jest scharakteryzowanie przestrzeni metrycznych hiperwypukłych w języku rozszerzania odwzorowań. Ponieważ charakteryzacja ta jest w istocie twierdzeniem typu Hahna–Banacha, na początek przedstawimy jego klasyczne sformułowanie i pokażemy, w jaki sposób wynika ono z hiperwypukłości prostej rzeczywistej. Będzie nam w tym celu potrzebne pojęcie funkcjonału subliniowego oraz pewna relacja porządkująca każdy zbiór rozszerzeń danego odwzorowania.

Definicja 2.2.1. Funkcjonał $p\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie X jest przestrzenią liniową, nazywamy *subliniowym*, gdy $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ dla $x, y \in X$ oraz $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dla $\lambda \in [0, +\infty)$, $x \in X$.

Definicja 2.2.2. Niech $T\colon A \to Y$ odwzorowuje niepusty podzbiór A zbioru X w zbiór Y i niech $\mathcal{T}$ będzie taką rodziną odwzorowań określonych na podzbiorach X i o wartościach w Y, że $T \in \mathcal{T}$ oraz jeśli pewne odwzorowanie $\hat{T}\colon \hat{A} \to Y$ należy do $\mathcal{T}$, to $A \subseteq \hat{A}$ oraz $\hat{T}|_A = T$. W rodzinie $\mathcal{T}$ możemy wówczas wprowadzić porządek, definiując $\hat{T}_1 \preccurlyeq \hat{T}_2$ dla odwzorowań $\hat{T}_i\colon \hat{A}_i \to Y$ $(i = 1, 2)$ należących do $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{A}_1 \subseteq \hat{A}_2$ oraz $\hat{T}_2|_{\hat{A}_1} = \hat{T}_1$. *Odwzorowaniem maksymalnym* (w rodzinie $\mathcal{T}$) nazywamy wówczas każdy element maksymalny rodziny $\mathcal{T}$.

Twierdzenie 2.2.1 (Hahna–Banacha)**.** *Niech Y będzie właściwą podprzestrzenią przestrzeni liniowej X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ funkcjonałem subliniowym, a $f\colon Y \to \mathbb{R}$ takim funkcjonałem liniowym, że $f(y) \leqslant p(y)$ dla $y \in Y$. Wówczas istnieje taki funkcjonał liniowy $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$, że $\tilde{f}|_Y = f$ oraz $\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$ dla $x \in X$.*

Pełen dowód powyższej wersji twierdzenia Hahna–Banacha znajduje się m.in. w książce [15, s. 165, twierdzenie 17.2]. Poniżej naszkicujemy dowód, w którym jawnie wykorzystamy hiperwypukłość prostej rzeczywistej.

Szkic dowodu. Łatwo udowodnić (korzystając np. z lematu Kuratowskiego––Zorna), że istnieje maksymalny funkcjonał $\tilde{f}\colon \widetilde{Y} \to \mathbb{R}$ spełniający tezę. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\widetilde{Y} \subsetneq X$. Niech $z \in X \setminus \widetilde{Y}$ i niech $\widetilde{Y}_1 := \{y + \lambda z : y \in \widetilde{Y}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Przedłużymy f do takiego funkcjonału liniowego $f_1\colon \widetilde{Y}_1 \to \mathbb{R}$, że $f_1(y_1) \leqslant p(y_1)$ dla $y_1 \in \widetilde{Y}_1$, otrzymując sprzeczność z maksymalnością $\widetilde{Y}$. Jest jasne, że każde rozszerzenie f na $\widetilde{Y}_1$ jest postaci $y + \lambda z \mapsto f(y) + \lambda\zeta$, gdzie $y \in \widetilde{Y}$, dla pewnego $\zeta \in \mathbb{R}$. Wykażemy istnienie takiego $\zeta \in \mathbb{R}$, że $f(y) + \lambda\zeta \leqslant p(y + \lambda z)$ dla dowolnych $y \in \widetilde{Y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, lub, równoważnie, $f(y) - p(y - z) \leqslant \zeta \leqslant p(y + z) - f(y)$ dla $y \in \widetilde{Y}$. Oznaczmy $I_y := [f(y) - p(y - z), p(y + z) - f(y)]$ dla $y \in \widetilde{Y}$; nietrudno pokazać, że $I_{y'} \cap I_{y''} \neq \emptyset$ dla $y', y'' \in \widetilde{Y}$. Istnienie żądanego ζ wynika więc z hiperwypukłości $\mathbb{R}$. $\square$

Odnotujmy pewien szczególny przypadek powyższego twierdzenia, nazywany również twierdzeniem Hahna–Banacha i wystarczający w wielu zastosowaniach.

Wniosek 2.2.2. *Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X i niech $f\colon Y \to \mathbb{R}$ będzie ciągłym funkcjonałem liniowym. Wówczas można przedłużyć f do ciągłego funkcjonału liniowego $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ z zachowaniem normy, tj. tak, by $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Dowód. Wystarczy położyć $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$ w twierdzeniu 2.2.1. $\square$

Zajmiemy się teraz twierdzeniem typu Hahna–Banacha dla przestrzeni metrycznych. Zaczniemy od zdefiniowania pojęcia modułu ciągłości, które będzie odgrywało rolę analogiczną do funkcjonału subliniowego p z twierdzenia 2.2.1.

Definicje 2.2.3. Funkcję niemalejącą $\omega\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ o tej własności, że $\omega(0+) = 0$, nazywamy *modułem ciągłości*. Moduł ciągłości ω nazywamy *subaddytywnym*, jeśli $\omega(\delta_1 + \delta_1) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ dla $\delta_1, \delta_2 > 0$. Jeśli $T\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem między przestrzeniami metrycznymi X i Y, to mówimy, że ω jest *modułem ciągłości odwzorowania* T, jeżeli jest modułem ciągłości oraz $d\big(T(x_1), T(x_2)\big) \leqslant \omega\big(d(x_1, x_2)\big)$ dla $x_1, x_2 \in X$. Gdy odwzorowanie T jest jednostajnie ciągłe, definiujemy funkcję $\omega_T(\delta) := \sup\big\{d\big(T(x_1), T(x_2)\big) : x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) \leqslant \delta\big\}$, zwaną *minimalnym modułem ciągłości odwzorowania* T.

Uwaga 2.2.1. Łatwo zauważyć, że odwzorowanie między dwiema przestrzeniami metrycznymi ma moduł ciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednostajnie ciągłe; ponadto, zgodnie z oczekiwaniami, minimalny moduł ciągłości odwzorowania jednostajnie ciągłego jest jego modułem ciągłości i każdy inny jego moduł ciągłości jest większy lub równy (punktowo) od minimalnego.

Uwaga 2.2.2. Jeśli $T\colon X \to Y$ jest jednostajnie ciągłym odwzorowaniem przestrzeni metrycznej całkowicie wypukłej X w przestrzeń metryczną Y, to jego minimalny moduł ciągłości ω_T jest subaddytywny. Istotnie, niech $\delta_1, \delta_2 > 0$ będą dowolne. Obierzmy $\varepsilon > 0$; istnieją takie punkty $x_1, x_2 \in X$, że $d_X(x_1, x_2) \leqslant \delta_1 + \delta_2$ oraz $d_Y\big(T(x_1), T(x_2)\big) > \omega_T(\delta_1 + \delta_2) - \varepsilon$. Ponieważ X jest całkowicie wypukła, zatem istnieje takie $z \in X$, że $d_X(x_i, z) = \frac{\delta_i}{\delta_1+\delta_2} d_X(x_1, x_2) \leqslant \delta_i$ dla $i = 1, 2$. Stąd mamy

$$\begin{aligned}\omega_T(\delta_1 + \delta_2) - \varepsilon < d_Y\big(T(x_1), T(x_2)\big) &\leqslant \\ \leqslant d_Y\big(T(x_1), T(z)\big) + d_Y\big(T(z), T(x_2)\big) &\leqslant \\ \leqslant \omega_T\big(d_X(x_1, z)\big) + \omega_T\big(d_X(z, x_2)\big) &\leqslant \\ \leqslant \omega_T(\delta_1) + \omega_T(\delta_2);&\end{aligned}$$

wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy więc $\omega_T(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_T(\delta_1) + \omega_T(\delta_2)$ dla $\delta_1, \delta_2 > 0$ i dowód jest zakończony.

Przykład 2.2.1. Odwzorowanie $T\colon X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi ma moduł ciągłości postaci $\omega(\delta) = L\delta^\alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Höldera ze stałą L i wykładnikiem α. W szczególności, jeśli $T\colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na przestrzeni unormowanej X, to jego minimalny moduł ciągłości jest dany wzorem $\omega_T(\delta) = \|f\| \cdot \delta$.

Udowodnimy teraz pewną konsekwencję aksjomatu wyboru. Mówiąc z grubsza, pozwoli ona udowodnić istnienie odpowiedniego rozszerzenia odwzorowania na *całą* przestrzeń, o ile zawsze potrafimy rozszerzać je na przestrzenie *o jeden punkt większe*.

Lemat 2.2.3. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $A \subseteq X$ niepustym podzbiorem X, a $T\colon A \to Y$ odwzorowaniem o module ciągłości ω. Wówczas istnieje maksymalne rozszerzenie $\widetilde{T}\colon \widetilde{A} \to Y$ odwzorowania T o tym samym module ciągłości.*

Dowód. Rozważmy rodzinę $\mathcal{T}$ rozszerzeń odwzorowania T posiadających moduł ciągłości ω; rodzina ta jest oczywiście niepusta, bo $T \in \mathcal{T}$. Sprawdzimy, że dowolny łańcuch w $\mathcal{T}$ ma ograniczenie górne (w sensie porządku określonego w definicji 2.2.2). Niech $\{\hat{T}_i\}_{i\in I}$, gdzie $\hat{T}_i\colon \hat{A}_i \to Y$ dla $i \in I$, będzie łańcuchem w $\mathcal{T}$. Niech $\hat{A} := \bigcup_{i\in I} \hat{A}_i$ oraz niech $\hat{T}\colon \hat{A} \to Y$ będzie dane wzorem $\hat{T}(x) := \hat{T}_i(x)$, gdzie $i \in I$ jest takie, że $x \in \hat{A}_i$. Odwzorowanie $\hat{T}$ jest dobrze zdefiniowane, gdyż jeśli $x \in \hat{A}_i$ oraz $x \in \hat{A}_j$ dla pewnych $i, j \in I$, to $\hat{A}_i \subseteq \hat{A}_j$ lub $\hat{A}_j \subseteq \hat{A}_i$ i wówczas $\hat{T}_j|_{\hat{A}_i} = \hat{T}_i$ lub $\hat{T}_i|_{\hat{A}_j} = \hat{T}_j$ odpowiednio; w każdym przypadku otrzymujemy $\hat{T}_i(x) = \hat{T}_j(x)$. Inkluzje $A \subseteq \hat{A} \subseteq X$ oraz równość $\hat{T}|_A = f$ są oczywiste. Dla dowodu, że ω jest modułem ciągłości odwzorowania $\hat{T}$ załóżmy, że $x_1, x_2 \in \hat{A}$; wówczas $x_1 \in \hat{A}_{i_1}$, $x_2 \in \hat{A}_{i_2}$ dla pewnych $i_1, i_2 \in I$; ponieważ $\mathcal{T}$ jest łańcuchem, więc $x_1, x_2 \in \hat{A}_i$ dla pewnego $i \in I$. Stąd $d(\hat{T}(x_1), \hat{T}(x_2)) = d(\hat{T}_i(x_1), \hat{T}_i(x_2)) \leqslant \omega(d(x_1, x_2))$; zatem ω jest modułem ciągłości odwzorowania $\hat{T}$. Wykazaliśmy, że $\hat{T}$ jest ograniczeniem górnym łańcucha $\{\hat{T}_i\}_{i\in I}$; istnienie elementu maksymalnego w $\mathcal{T}$ wynika więc z lematu Kuratowskiego–Zorna. $\square$

Możemy teraz sformułować i udowodnić zapowiadane twierdzenie, będące odpowiednikiem twierdzenia 2.2.1 dla przestrzeni metrycznych.

Twierdzenie 2.2.4. *Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej X, Y niech będzie przestrzenią metryczną hiperwypukłą, a $T\colon A \to Y$ odwzorowaniem posiadającym subaddytywny moduł ciągłości ω. Istnieje wówczas takie odwzorowanie $\widetilde{T}\colon X \to Y$ o module ciągłości ω, że $\widetilde{T}|_A = f$.*

Dowód. Z lematu 2.2.3 wiemy, że istnieje maksymalne rozszerzenie $\widetilde{T}\colon \widetilde{A} \to Y$ odwzorowania T, posiadające moduł ciągłości ω. Udowodnimy, że $\widetilde{A} = X$. Gdyby $X \setminus \widetilde{A} \neq \emptyset$, istniałoby $z \in X \setminus \widetilde{A}$; niech $\widetilde{A}_1 := \widetilde{A} \cup \{z\}$. Skonstruujemy takie odwzorowanie $\widetilde{T}_1\colon \widetilde{A}_1 \to Y$ o module ciągłości ω, że $\widetilde{T}_1|_{\widetilde{A}} = \widetilde{T}$. Rozważmy rodzinę $\{\bar{B}_x\}_{x\in\widetilde{A}}$ kul domkniętych $\bar{B}_x := \bar{B}(\widetilde{T}(x), \omega(d(x, z)))$ w Y. Dla $x_1, x_2 \in \widetilde{A}$ mamy $d(\widetilde{T}(x_1), \widetilde{T}(x_2)) \leqslant \omega(d(x_1, x_2)) \leqslant \omega(d(x_1, z) + d(z, x_2)) \leqslant \omega(d(x_1, z)) + \omega(d(x_2, z))$; ponieważ Y jest hiperwypukła, więc $\bigcap_{x\in\widetilde{A}} \bar{B}_x \neq \emptyset$. Niech $y \in \bigcap_{x\in\widetilde{A}} \bar{B}_x$, czyli $d(\widetilde{T}(x), y) \leqslant \omega(d(x, z))$ dla $x \in \widetilde{A}$. Zdefiniujmy $\widetilde{T}_1\colon \widetilde{A} \to Y$ wzorami $\widetilde{T}_1(x) := \widetilde{T}(x)$ dla $x \in \widetilde{A}$ oraz $\widetilde{T}_1(z) := y$. Jak widać z powyższej nierówności, ω jest modułem ciągłości odwzorowania $\widetilde{T}_1$; ponadto $\widetilde{T}_1|_{\widetilde{A}} = \widetilde{T}$. To jednak przeczy maksymalności $\widetilde{T}$. Stąd $\widetilde{A} = X$ i twierdzenie jest udowodnione. $\square$

Wśród odwzorowań posiadających subaddytywny moduł ciągłości można wyróżnić pewną szczególną klasę tzw. odwzorowań nierozszerzających. Zdefiniujemy teraz tę klasę i sformułujemy dla niej twierdzenie 2.2.4.

Definicja 2.2.4. Odwzorowanie $T\colon X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi X i Y nazywamy *nierozszerzającym*, jeśli ma moduł ciągłości postaci $\omega(\delta) = \delta$, czyli gdy $d\big(T(x_1), T(x_2)\big) \leqslant d(x_1, x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$.

Wniosek 2.2.5. *Niech $T\colon A \to Y$ będzie odwzorowaniem nierozszerzającym niepustego podzbioru A przestrzeni metrycznej X w przestrzeń hiperwypukłą Y. Wówczas istnieje nierozszerzające przedłużenie $\widetilde{T}\colon X \to Y$ odwzorowania T.*

Opiszemy teraz związki między pojęciami przestrzeni metrycznej hiperwypukłej i retraktu nierozszerzającego. Zaczniemy od wprowadzenia niezbędnych definicji.

Definicje 2.2.5. Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Odwzorowanie ciągłe $R\colon X \to A$ nazywamy *retrakcją* (*przestrzeni X na zbiór A*), jeśli $R(x) = x$ dla każdego $x \in A$; jeśli takie odwzorowanie istnieje, to podzbiór A nazywamy *retraktem* przestrzeni X. Jeśli X jest przestrzenią metryczną oraz istnieje retrakcja $R\colon X \to A$, która jest odwzorowaniem nierozszerzającym, to nazywamy ją *retrakcją nierozszerzającą*, zaś A nazywamy *retraktem nierozszerzającym* przestrzeni metrycznej X. Przestrzeń topologiczną nazywamy *retraktem absolutnym*, jeśli jest metryzowalna oraz jest retraktem każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej, której jest domkniętą podprzestrzenią. Przestrzeń metryczną nazywamy *retraktem absolutnym nierozszerzającym*, jeśli jest retraktem nierozszerzającym każdej przestrzeni metrycznej, której jest podprzestrzenią.

Uwaga 2.2.3. Niektórzy autorzy opuszczają słowo „domkniętą” w podanej wyżej definicji retraktu absolutnego, otrzymując istotnie węższą klasę przestrzeni (zob. np. [1, s. 422]).

Uwaga 2.2.4. Z powyższej definicji nie musi być oczywiste, czy każdy retrakt absolutny nierozszerzający jest retraktem absolutnym, ponieważ żądanie, by pewna przestrzeń topologiczna metryzowalna A była podprzestrzenią innej przestrzeni topologicznej metryzowalnej X nie wymaga zgodności dowolnych metryk obu przestrzeni na A. Okazuje się jednak, że można zawsze tak zmetryzować X, by uzyskać taką zgodność; jest to wnioskiem z poniższego twierdzenia, udowodnionego przez Hausdorffa, które podamy bez dowodu.

Twierdzenie 2.2.6. *Niech A będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni topologicznej metryzowalnej X oraz niech d_A będzie metryką na A wyznaczającą w A topologię podprzestrzeni. Wówczas można d_A rozszerzyć do metryki d_X w X zgodnej z wyjściową topologią na X.*

Wniosek 2.2.7. *Każdy absolutny retrakt nierozszerzający jest retraktem absolutnym.*

Dowód. Niech absolutny retrakt nierozszerzający $\langle A, d_A \rangle$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni topologicznej metryzowalnej X. Zgodnie z twierdzeniem 2.2.6 istnieje w X metryka d_X zgodna z d_A na A. Z założenia istnieje teraz retrakcja $R\colon X \to A$. $\square$

Wniosek 2.2.8. *Każda przestrzeń metryczna hiperwypukła jest absolutnym retraktem nierozszerzającym (a w szczególności retraktem absolutnym).*

Dowód. Niech A będzie przestrzenią hiperwypukłą i niech X będzie przestrzenią metryczną zawierającą A. Niech odwzorowanie $I\colon A \to A$ będzie identycznością; zgodnie z wnioskiem 2.2.5 można przedłużyć I do odwzorowania nierozszerzającego $R\colon X \to A$, otrzymując retrakcję nierozszerzającą. Druga część tezy wynika z wniosku 2.2.7. $\square$

Twierdzenie 2.2.9. *Retrakt nierozszerzający przestrzeni metrycznej hiperwypukłej jest hiperwypukły.*

Dowód. Niech $R\colon X \to A$ będzie nierozszerzającą retrakcją pewnej przestrzeni metrycznej hiperwypukłej X na jej niepusty podzbiór A. Niech $\{\bar{B}_A(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ będzie rodziną kul domkniętych w A o tej własności, że $d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$; wykażemy, że rodzina ta ma niepusty przekrój. Z hiperwypukłości X wnosimy, że rodzina kul domkniętych $\{\bar{B}_X(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ w X ma niepusty przekrój. Niech $y \in \bigcap_{i\in I} \bar{B}_X(x_i, r_i)$; wówczas $R(y) \in A$ oraz dla dowolnego $i \in I$ mamy $d(R(y), x_i) = d\big(R(y), R(x_i)\big) \leqslant d(y, x_i) \leqslant r_i$, więc $R(y) \in \bigcap_{i\in I} \bar{B}_A(x_i, r_i)$. $\square$

Przykład 2.2.2. Niech $v_0, v^0 \in L^\infty[a,b]$ i zdefiniujmy $X := \{x \in L^\infty[a,b] : v_0 \leqslant x \leqslant v^0\}$. Wówczas X jest hiperwypukła. Istotnie, określmy odwzorowanie $R\colon L^\infty \to X$ wzorem

$$R(x)(t) := \begin{cases} v_0(t), & \text{gdy } x(t) < v_0(t), \\ x(t), & \text{gdy } v_0(t) \leqslant x(t) \leqslant v^0(t), \\ v^0(t), & \text{gdy } v^0(t) < x(t). \end{cases}$$

Jest oczywiste, że $R(x) = R(y)$ p.w., gdy $x = y$ p.w. Pokażemy, że R jest nierozszerzającą retrakcją $L^\infty[a,b]$ na X. Niech $x, y \in L^\infty[a,b]$. Oznaczmy

$$\begin{aligned} A &:= \{t \in [a,b] : v_0(t) \leqslant x(t) \leqslant v^0(t)\}, \\ A_0 &:= \{t \in [a,b] : x(t) < v_0(t)\}, \\ A^0 &:= \{t \in [a,b] : v^0(t) < x(t)\}, \\ B &:= \{t \in [a,b] : v_0(t) \leqslant y(t) \leqslant v^0(t)\}, \\ B_0 &:= \{t \in [a,b] : y(t) < v_0(t)\}, \\ B^0 &:= \{t \in [a,b] : v^0(t) < y(t)\}. \end{aligned}$$

Jest jasne, że wszystkie te zbiory są mierzalne; stąd $R(x)$ jest również funkcją mierzalną dla każdego $x \in L^\infty[a,b]$. Istotna ograniczoność funkcji $R(x)$ jest oczywista. Wprost z definicji odwzorowania R wynika więc, że jest ono retrakcją $L^\infty[a,b]$ na X. Dalej, zauważmy, że $[a,b] = A \cup A_0 \cup A^0 = B \cup B_0 \cup B^0$. Łatwo teraz widzieć, że dla każdego $t \in [a,b]$ mamy $|R(x)(t) - R(y)(t)| \leqslant |x(t) - y(t)|$. Dla przykładu rozważmy przypadek $t \in A \cap B_0$; wówczas $|R(x)(t) - R(y)(t)| = |x(t) - v_0(t)| = x(t) - v_0(t) < x(t) - y(t) \leqslant |x(t) - y(t)|$. W konsekwencji otrzymujemy $\|R(x) - R(y)\|_\infty \leqslant \|x - y\|_\infty$, czyli R jest odwzorowaniem nierozszerzającym.

Uwaga 2.2.5. Twierdzenie 2.2.9 skłania do postawienia pytania, czy obraz przestrzeni metrycznej hiperwypukłej względem odwzorowania nierozszerzającego jest hiperwypukły. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 2.2.3. Określmy odwzorowanie $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wzorem $T(x) = e^{ix}$. Pokażemy, że jest to nierozszerzające odwzorowanie przestrzeni hiperwypukłej $\mathbb{R}$ na podzbiór, który nie jest hiperwypukły. Mamy dla $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|T(x) - T(y)| &= |e^{ix} - e^{iy}| = |\cos x + i \sin x - \cos y - i \sin y| = \\
&= |-2 \sin \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2} + 2i \cos \tfrac{x+y}{2} \sin \tfrac{x-y}{2}| = \\
&= 2|\sin \tfrac{x-y}{2} (i \cos \tfrac{x+y}{2} - \sin \tfrac{x+y}{2})| = \\
&= 2|\sin \tfrac{x-y}{2}| \cdot |i(\cos \tfrac{x+y}{2} + i \sin \tfrac{x+y}{2})| = \\
&= 2|\sin \tfrac{x-y}{2}||ie^{i\frac{x+y}{2}}| = 2|\sin \tfrac{x-y}{2}| \leqslant |x - y|.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $T(\mathbb{R}) = C := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Pokażemy, że zbiór C nie jest hiperwypukły. Niech $z_k := i^k$ oraz $r_k := 1$ dla $k = 0,1,2,3$. Jest oczywiste, że $z_k \in C$ oraz że $|z_k - z_l| \leqslant r_k + r_l$ dla $k, l = 0,1,2,3$. Ponadto $0 \in B := \bigcap_{k=0}^3 \bar{B}_{\mathbb{C}}(z_k, r_k)$. Gdyby istniało $z \in B$ różne od zera, mielibyśmy $\operatorname{Re} z \neq 0$ lub $\operatorname{Im} z \neq 0$. Niech np. $\operatorname{Re} z < 0$; wówczas $|z - z_0| = |z - 1| \geqslant |\operatorname{Re}(z-1)| = |\operatorname{Re} z - 1| = -\operatorname{Re} z + 1 > 1$, czyli $z \notin \bar{B}_{\mathbb{C}}(z_0, r_0)$; w pozostałych przypadkach rozumujemy analogicznie. Stąd wynika, że $B = \{0\}$, a w konsekwencji $\bigcap_{k=0}^3 \bar{B}_C(z_k, r_k) = B \cap C = \emptyset$ i zbiór C nie jest hiperwypukły.

Okazuje się, że twierdzenie 2.2.4 można odwrócić. Udowodnimy nawet nieco więcej, a mianowicie odwrócenie wniosku 2.2.5.

Twierdzenie 2.2.10. *Niech Y będzie przestrzenią metryczną o tej własności, że dla dowolnych: przestrzeni metrycznej X, niepustego podzbioru $A \subseteq X$ i odwzorowania nierozszerzającego $T \colon A \to Y$ istnieje nierozszerzające przedłużenie $\widetilde{T} \colon X \to Y$ odwzorowania T. Wówczas Y jest przestrzenią hiperwypukłą.*

Twierdzenie 2.2.10 można udowodnić kilkoma sposobami. Metoda, której użyjemy, pochodzi od Aronszajna i Panitchpakdi'ego; naszkicujemy też dwie alternatywne drogi dowodu.

Dowód I twierdzenia 2.2.10. Pokażemy najpierw całkowitą wypukłość przestrzeni Y. Niech $\bar{B}_i := \bar{B}_Y(y_i, r_i)$ dla $i = 1, 2$ będą takimi kulami domkniętymi w Y, że $d(y_1, y_2) \leqslant r_1 + r_2$. Udowodnimy, że $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \neq \emptyset$. Wystarczy rozważyć przypadek $y_1 \neq y_2$. Niech $Y_0 := \{y_1, y_2\}$ i $T\colon Y_0 \to Y$ będzie dane wzorem $T(y_i) := y_i$ dla $i = 1, 2$. Wybierzmy $z \notin Y_0$ i połóżmy $Y_1 := Y_0 \cup \{z\}$. Rozszerzmy metrykę d (dziedziczoną z Y) z Y_0 na Y_1 według wzoru: $d(y_i, z) := \frac{r_i}{r_1+r_2} d(y_1, y_2)$ dla $i = 1, 2$. Z założenia możemy przedłużyć T do odwzorowania nierozszerzającego $\widetilde{T}\colon Y_1 \to Y$. Otrzymujemy w ten sposób (dla $i = 1, 2$): $d(\widetilde{T}(z), y_i) = d(\widetilde{T}(z), \widetilde{T}(y_i)) \leqslant d(z, y_i) = \frac{r_i}{r_1+r_2} d(y_1, y_2) \leqslant r_i$, czyli $\widetilde{T}(z) \in \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$.

Rozważmy teraz taką rodzinę kul $\{\bar{B}_i\}_{i\in I}$ w Y, gdzie $\bar{B}_i := \bar{B}_Y(y_i, r_i)$ dla $i \in I$, że $d(y_i, y_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$. Zdefiniujmy $Y_0 := \{y_i\}_{i\in I}$ i niech ponownie $T\colon Y_0 \to Y$ będzie określone wzorem $T(y_i) := y_i$ dla $i \in I$. Niech $z \notin Y$ i niech $Y_1 := Y_0 \cup \{z\}$. Zdefiniujmy $g\colon Y_0 \to [0, +\infty)$ wzorem $g(y_i) := \inf\{r > 0 : \bar{B}_Y(y_j, r_j) \subseteq \bar{B}_Y(y_i, r) \text{ dla pewnego } j \in I\}$ dla $i \in I$. Wykażemy, że $d(y_i, y_j) \leqslant g(y_i) + g(y_j)$ oraz że $g(y_i) \leqslant d(y_i, y_j) + g(y_j)$ dla dowolnych $i, j \in I$.

Dla dowodu pierwszej nierówności obierzmy liczbę $\varepsilon > 0$ i tak wybierzmy $i', j' \in I$, aby zachodziły inkluzje $\bar{B}_Y(y_{i'}, r_{i'}) \subseteq \bar{B}_Y(y_i, g(y_i) + \varepsilon)$ oraz $\bar{B}_Y(y_{j'}, r_{j'}) \subseteq \bar{B}_Y(y_j, g(y_j) + \varepsilon)$. Ponieważ $d(y_{i'}, y_{j'}) \leqslant r_{i'} + r_{j'}$, z całkowitej wypukłości Y mamy $\bar{B}_Y(y_{i'}, r_{i'}) \cap \bar{B}_Y(y_{j'}, r_{j'}) \neq \emptyset$; stąd również $\bar{B}_Y(y_i, g(y_i)+\varepsilon) \cap \bar{B}_Y(y_j, g(y_j)+\varepsilon) \neq \emptyset$, a zatem $d(y_i, y_j) \leqslant g(y_i)+g(y_j)+2\varepsilon$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy stąd pierwszą nierówność.

Aby udowodnić drugą nierówność, ponownie obierzmy dowolne $\varepsilon > 0$ i wybierzmy takie $i' \in I$, aby $\bar{B}_Y(y_{i'}, r_{i'}) \subseteq \bar{B}_Y(y_j, g(y_j) + \varepsilon)$. Z warunku trójkąta wynika, że $\bar{B}_Y(y_j, g(y_j)+\varepsilon) \subseteq \bar{B}_Y(y_i, d(y_i, y_j)+g(y_j)+\varepsilon)$, a zatem $g(y_i) \leqslant d(y_i, y_j) + g(y_j) + \varepsilon$. Znów korzystając z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy żądaną nierówność.

Mając funkcję g o powyższych własnościach, rozumujemy następująco. Jeśli $y_{i_0} \in Y_0$ jest miejscem zerowym funkcji g, to dla każdego $i \in I$ mamy $d(y_{i_0}, y_i) \leqslant g(y_i) \leqslant r_i$, a więc $y_{i_0} \in \bigcap_{i\in I} \bar{B}_Y(y_i, r_i)$ i twierdzenie jest udowodnione. Rozważmy teraz przypadek, w którym g nie ma miejsc zerowych. Niech wówczas $z \notin Y_0$ i niech $Y_1 := Y_0 \cup \{z\}$. Z podanych nierówności wynika, że możemy rozszerzyć metrykę d (dziedziczoną z Y) z Y_0 na Y_1 według wzoru $d(y_i, z) := g(y_i)$. Z założenia wiemy, że można przedłużyć odwzorowanie $T\colon Y_0 \to Y$ dane wzorem $T(y_i) := y_i$ dla $i \in I$ do nierozszerzającego $\widetilde{T}\colon Y_1 \to Y$. Otrzymujemy w ten sposób $d(f(z), y_i) = d(f(z), f(y_i)) \leqslant d(z, y_i) = g(y_i) \leqslant r_i$ dla $i \in I$, czyli $T(z) \in \bigcap_{i\in I} \bar{B}_Y(y_i, r_i)$, co kończy dowód hiperwypukłości Y. □

Szkic dowodu II twierdzenia 2.2.10. Niech $\{\bar{B}_Y(y_i, r_i)\}_{i\in I}$ będzie taką rodziną kul w Y, że $d(y_i, y_j) \leqslant r_i+r_j$ dla $i, j \in I$. Załóżmy bez straty ogólności, że $y_i \neq y_j$ dla $i \neq j$ i oznaczmy $Y_0 := \{y_i\}_{i\in I}$. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $g\colon Y_0 \to [0, +\infty)$ o tej własności, że $d(y_i, y_j) \leqslant g(y_i) + g(y_j)$

dla $i, j \in I$. Z założenia o rozważanej rodzinie kul wiemy, że funkcja $r\colon Y_0 \to [0, +\infty)$ dana wzorem $r(y_i) := r_i$ dla $i \in I$ należy do $\mathcal{F}$. Lemat Kuratowskiego–Zorna pozwala wykazać, że istnieje w $\mathcal{F}$ funkcja g punktowo minimalna i nieprzekraczająca r. Można też pokazać, że minimalność g w $\mathcal{F}$ implikuje nierówność $g(y_i) \leqslant d(y_i, y_j) + g(y_j)$ dla $i, j \in I$. (W istocie, powyższe stwierdzenia są treścią punktu (1) lematu 2.3.4 oraz lematu 2.3.3 z paragrafu 2.3.) Dalej argumentujemy identycznie jak w dowodzie I. □

Uwaga 2.2.6. Zauważmy, że w dowodzie I podajemy jawny wzór na funkcję g, unikając powoływania się na aksjomat wyboru.

Szkic dowodu III twierdzenia 2.2.10. Można nietrudno udowodnić (zob. np. [10, s. 395]), że każdą przestrzeń metryczną można zanurzyć izometrycznie w pewną przestrzeń hiperwypukłą (my uzyskamy ten wynik – daleko większym nakładem pracy – dowodząc znacznie mocniejszego twierdzenia 2.3.6). W połączeniu z twierdzeniem 2.2.9 daje to hiperwypukłość każdego absolutnego retraktu nierozszerzającego. Wystarczy teraz powtórzyć rozumowanie z wniosku 2.2.8, aby pokazać, że przestrzenie spełniające założenie twierdzenia są absolutnymi retraktami nierozszerzającymi. □

Otrzymaliśmy w ten sposób zapowiadaną charakteryzację przestrzeni metrycznych hiperwypukłych.

Wniosek 2.2.11. *Hiperwypukłość przestrzeni metrycznej Y jest równoważna następującej jej własności: dla dowolnych: przestrzeni metrycznej X, niepustego podzbioru $A \subseteq X$ i odwzorowania $T\colon A \to Y$ o subaddytywnym module ciągłości ω istnieje przedłużenie $\widetilde{T}\colon X \to Y$ odwzorowania T o tym samym module ciągłości. Zdanie to pozostaje prawdziwe, jeśli ograniczymy rozważania do klasy odwzorowań o module ciągłości $\omega(\delta) = \delta$, czyli nierozszerzających.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 2.2.4 (lub wniosek 2.2.5) i twierdzenie 2.2.10. □

Uwaga 2.2.7. W paragrafie 2.3 uzyskamy podobną charakteryzację, tym razem w języku retraktów (jedną jej połowę stanowi wniosek 2.2.8, a druga została zasygnalizowana w szkicu dowodu III twierdzenia 2.2.10).

2.3. Powłoka hiperwypukła

Dla zbiorów wypukłych w przestrzeniach liniowych można, jak wiadomo, zdefiniować powłokę wypukłą jako przecięcie wszystkich wypukłych nadzbiorów (lub, równoważnie, jako minimalny wypukły nadzbiór) danego zbioru. W niniejszym paragrafie opiszemy analogiczne pojęcie dla przestrzeni hiperwypukłych. Zaczniemy od sformułowania definicji.

Definicja 2.3.1. Niech X będzie dowolną przestrzenią metryczną. Trójkę uporządkowaną $\langle Y, d, e\rangle$, gdzie $\langle Y, d\rangle$ jest przestrzenią hiperwypukłą, a $e\colon X \to Y$ jest zanurzeniem izometrycznym, nazywamy *powłoką hiperwypukłą* przestrzeni X, jeśli jedynym podzbiorem hiperwypukłym Y zawierającym $e(X)$ jest sama przestrzeń Y. Zamiast $\langle Y, d, e\rangle$ będziemy zwykle pisali $\langle Y, e\rangle$ lub nawet Y, jeśli postać funkcji d i ewentualnie e będzie jasno wynikać z kontekstu. W przypadku, gdy X jest podprzestrzenią pewnej przestrzeni hiperwypukłej Z oraz $\langle Y, e\rangle$ jest taką powłoką hiperwypukłą przestrzeni X, że e jest zanurzeniem identycznościowym, a Y jest podprzestrzenią Z, będziemy mówili, że Y jest *powłoką hiperwypukłą zbioru X w przestrzeni Z*. Rodzinę wszystkich powłok hiperwypukłych zbioru X w przestrzeni hiperwypukłej Z będziemy oznaczać przez $\mathcal{H}_Z(X)$ lub $\mathcal{H}(X)$, jeśli będzie jasne z kontekstu, o jaką przestrzeń Z chodzi.

Uwaga 2.3.1. Zauważmy, że powłoka hiperwypukła zbioru X w przestrzeni Z to po prostu minimalny hiperwypukły nadzbiór X w Z.

Zgodnie z powyższym, wniosek 2.1.11 możemy sformułować następująco.

Wniosek 2.3.1. *Każdy podzbiór przestrzeni hiperwypukłej ma w niej powłokę hiperwypukłą.*

Sformułowanie definicji 2.3.1 sugeruje rozważanie powłoki hiperwypukłej *dowolnej* przestrzeni metrycznej, niekoniecznie będącej podprzestrzenią przestrzeni hiperwypukłej. Powstaje naturalny problem (postawiony po raz pierwszy przez Isbella), czy każda przestrzeń metryczna ma powłokę hiperwypukłą. Dalszy ciąg paragrafu jest poświęcony pozytywnemu rozstrzygnięciu tego problemu. Najpierw jednak podamy przykład powłoki hiperwypukłej oraz poczynimy kilka uwag na temat pewnych własności tego pojęcia.

Przykład 2.3.1. Wykażemy, że przy oznaczeniach z przykładu 2.1.4 mamy $H_\alpha \in \mathcal{H}(A)$. Niech B będzie takim podzbiorem X, że $A \subseteq B \subsetneq H_\alpha$; niech np. $a := \langle a_1, a_2\rangle \in H_\alpha \setminus B$. Z rozważań przykładu 2.1.4 wynika, że a jest jedynym punktem H_α o tej własności, że $d(\langle 0, 0\rangle, a) = a_1$ i $d(a, \langle 1, 0\rangle) = 1 - a_1$, przy czym $a_1 + (1 - a_1) = 1 = d(\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle)$. Podprzestrzeń B nie jest więc całkowice wypukła, nie może być zatem hiperwypukła (uwaga 2.1.2) i dowód jest zakończony.

Uwaga 2.3.2. Powłoka hiperwypukła zbioru w przestrzeni metrycznej hiperwypukłej (a tym bardziej powłoka hiperwypukła dowolnej przestrzeni metrycznej) nie musi być wyznaczona jednoznacznie. Stosując bowiem nadal oznaczenia z przykładu 2.1.4 widzimy, że dla różnych $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ otrzymujemy $H_{\alpha_1} \neq H_{\alpha_2}$, zatem rodzina $\mathcal{H}(A)$ jest nawet mocy co najmniej kontinuum. Jak zobaczymy w twierdzeniu 3.1.3, powłoka hiperwypukła ma jednak własność jednoznaczności z dokładnością do izometrii.

Uwaga 2.3.3. Jest oczywiste, że gdy $A \subseteq X \subseteq Y$ oraz X i Y są hiperwypukłe, to $\mathcal{H}_X(A) \subseteq \mathcal{H}_Y(A)$. Ponadto inkluzji tej nie można na ogół zastąpić znakiem równości; wystarczy np. położyć $Y := \mathbb{R}^2$ z metryką „maksimum”, $X := \{\langle x, 0\rangle \in X : x \in \mathbb{R}\}$ i $A := \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ i zastosować rozumowanie z przykładu 2.3.1. Łatwo również zauważyć, że jeśli $H \in \mathcal{H}_X(A)$, to $\mathcal{H}_H(A)$ jest dobrze określone i równe $\{H\}$.

Uwaga 2.3.4. Powłoka hiperwypukła dowolnego zbioru w przestrzeni metrycznej hiperwypukłej jest domknięta (jako podprzestrzeń zupełna – twierdzenie 2.1.5). Stąd, w przeciwieństwie do powłoki wypukłej, nie ma potrzeby osobnego rozpatrywania „domkniętej powłoki hiperwypukłej”. Upraszcza to niektóre rozważania w teorii punktu stałego.

Przejdziemy teraz do problemu istnienia powłoki hiperwypukłej dowolnej przestrzeni. Zbadamy najpierw własności pewnych funkcji, które można w naturalny sposób przyporządkować punktom przestrzeni metrycznej.

Definicja 2.3.2. Niech a będzie dowolnym punktem przestrzeni metrycznej X. Definiujemy wówczas funkcję $f_a\colon X \to [0, +\infty)$ wzorem $f_a(x) := d(a, x)$ dla $x \in X$.

Lemat 2.3.2. *Niech X będzie przestrzenią metryczną. Dla dowolnych punktów $a, b, x, y \in X$ zachodzą następujące własności:*

(1) *przyporządkowanie $a \mapsto f_a$ jest różnowartościowe;*

(2) $d(x, y) \leqslant f_a(x) + f_a(y)$*;*

(3) $f_a(x) \leqslant f_a(y) + d(x, y)$ (*w szczególności f_a jest nierozszerzająca, a zatem ciągła*);

(4) *f_a jest punktowo minimalna w następującym sensie: jeśli $g\colon X \to [0, +\infty)$ ma własności* (2) *i* (3) (*z g w miejsce f_a*) *oraz $g \leqslant f_a$, to $g = f_a$;*

(5) $d(a, b) = \sup |f_a - f_b|$.

Dowód. Własności (1) – (3) są oczywiste. Dla dowodu własności (4) załóżmy, że $g\colon X \to [0, +\infty)$ jest taką funkcją, że (2) i (3) są spełnione z g w miejsce f_a oraz $g \leqslant f_a$, ale $g \neq f_a$. Istnieje więc takie $b \in X$, że $g(b) < f_a(b)$. Ale wówczas mamy $f_a(b) = d(a, b) \leqslant g(a) + g(b) < f_a(a) + f_a(b) = f_a(b)$ – sprzeczność. Aby udowodnić własność (5), zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$ mamy: $|f_a(x) - f_b(x)| = |d(a, x) - d(b, x)| \leqslant d(a, b)$, więc $\sup |f_a - f_b| \leqslant d(a, b)$. Ale np. dla $x = a$ mamy $|f_a(x) - f_b(x)| = f_b(a) = d(a, b)$, co kończy dowód własności (5). □

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań, podamy dla nich pewną intuicyjną motywację.

Zauważmy, że jeśli chcemy „powiększyć” przestrzeń metryczną $\langle X, d\rangle$ o pewien punkt, powiedzmy $a \notin X$, to musimy określić metrykę d' na zbiorze $X \cup \{a\}$, czyli w pewnym sensie znaleźć funkcję $f_a\colon X \cup \{a\} \to [0, +\infty)$ spełniającą warunki (2) i (3) z lematu 2.3.2, która będzie odgrywała rolę odległości między punktem a a punktami w X. Sugeruje to istnienie związku między możliwymi rozszerzeniami przestrzeni X a zbiorami funkcji spełniających te warunki. Pewna trudność leży w tym, że dodając więcej niż jeden (a być może nieprzeliczalnie wiele) punktów, musimy określić również odległości między nimi, i to w taki sposób, aby nadal spełniony był warunek trójkąta. (Punkt (5) lematu 2.3.2 nasuwa tu myśl o metryce supremalnej.) Celem tego paragrafu jest opisanie pewnej takiej rodziny funkcji, dla której udaje się rozwiązać rozważany problem; równoważnie, opiszemy pewne rozszerzenie przestrzeni X.

Definicja 2.3.3. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Przez εX oznaczymy zbiór wszystkich funkcji $f\colon X \to [0, +\infty)$, dla których spełnione są warunki (2) – (4) z lematu 2.3.2 z f w miejsce f_a; funkcje takie będziemy nazywać *funkcjami ekstremalnymi.* Przez $e_X\colon X \to \varepsilon X$ będziemy oznaczać odwzorowanie $a \mapsto f_a$; gdy nie będzie wątpliwości, o jaką przestrzeń X chodzi, będziemy pisać e w miejsce e_X.

W powyższej definicji możemy osłabić założenia; fakt ten jest treścią poniższego lematu.

Lemat 2.3.3. *Funkcja $f\colon X \to [0, +\infty)$ określona na przestrzeni metrycznej X jest ekstremalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:*

(1) *$d(x, y) \leqslant f(x) + f(y)$ dla $x, y \in X$;*

(2) *f jest punktowo minimalna wśród funkcji nieujemnych na X, spełniających warunek* (1)*.*

Dowód. Pokażemy wpierw, że przy powyższych założeniach jest $f(x) \leqslant f(y) + d(x, y)$ dla $x, y \in X$. Gdyby bowiem było inaczej, to dla pewnych $a, b \in X$ byłoby $f(a) > f(b) + d(a, b)$. Połóżmy więc

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \neq a, \\ f(b) + d(a, b) & \text{dla } x = a. \end{cases}$$

Wówczas $g \leqslant f$ i $g \neq f$, ale nietrudno zauważyć, że $d(x, y) \leqslant g(x) + g(y)$ (istotnie, wystarczy rozważyć przypadek $x = a \neq y$; wtedy $d(x, y) \leqslant d(x, b) + d(b, y) \leqslant d(x, b) + f(b) + f(y) = g(x) + g(y)$) – sprzeczność z minimalnością f. Są zatem spełnione warunki (2) – (3) z lematu 2.3.2 z f w miejsce f_a; warunek (4) z tego lematu jest oczywistą konsekwencją (2).

Załóżmy teraz, że $f\colon X \to [0, +\infty)$ jest ekstremalna. Wówczas warunek (1) zachodzi wprost z definicji. Wykażemy warunek (2). Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji $\hat{f}\colon X \to [0, +\infty)$ spełniających (1); rodzina ta jest niepusta, ponieważ $f \in \mathcal{F}$. Pokażemy, że w $\mathcal{F}$ istnieje element minimalny $\tilde{f} \leqslant f$. Niech $\{\hat{f}_i\}_{i \in I}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{F}$ i niech $\hat{f}(x) := \inf_{i \in I} \hat{f}_i(x)$. Oczywiście $\hat{f}(x) \in [0, +\infty)$ dla $x \in X$. Pokażemy, że $\hat{f} \in \mathcal{F}$. Gdyby $d(a, b) > \hat{f}(a) + \hat{f}(b)$ dla pewnych $a, b \in X$, istniałoby takie $\hat{f}_{i_1} \in \mathcal{F}$, że

$$d(a, b) = \hat{f}(a) + \big(d(a, b) - \hat{f}(a) - \hat{f}(b)\big) + \hat{f}(b) > \hat{f}_{i_1}(a) + \hat{f}(b)$$

oraz takie $\hat{f}_{i_2} \in \mathcal{F}$, że

$$d(a, b) = \hat{f}_{i_1}(a) + \hat{f}(b) + \big(d(a, b) - \hat{f}_{i_1}(a) - \hat{f}(b)\big) > \hat{f}_{i_1}(a) + \hat{f}_{i_2}(b).$$

Ponieważ $\{\hat{f}_i\}_{i\in I}$ jest łańcuchem, możemy założyć np., że $\hat{f}_{i_1} \leqslant \hat{f}_{i_2}$. Mamy wówczas $d(a,b) > \hat{f}_{i_1}(a)+\hat{f}_{i_2}(b) \geqslant \hat{f}_{i_1}(a)+\hat{f}_{i_1}(b)$, co jest sprzeczne z $\hat{f}_{i_1} \in \mathcal{F}$. Istnienie elementu minimalnego $\hat{f} \leqslant f$ wynika więc z lematu Kuratowskiego–Zorna. Z pierwszej części dowodu widać, że spełnione są warunki (2) – (3) z lematu 2.3.2 z $\tilde{f}$ w miejsce f_a. Gdyby więc (2) nie zachodziło, byłoby $\tilde{f} \leqslant f$ i $\tilde{f} \neq f$ – sprzeczność z definicją funkcji ekstremalnej. □

W dalszym ciągu będziemy często korzystać z powyższej charakteryzacji. Następujący lemat podaje podstawowe własności funkcji ekstremalnych.

Lemat 2.3.4. *Niech $\langle X, d\rangle$ będzie przestrzenią metryczną.*

(1) *Niech A będzie niepustym podzbiorem X, a funkcja $r\colon A \to [0,+\infty)$ niech spełnia nierówność $d(x,y) \leqslant r(x)+r(y)$ dla $x,y \in A$. Wówczas istnieje takie jej rozszerzenie $\tilde{r}\colon X \to [0,+\infty)$, że $d(x,y) \leqslant \tilde{r}(x)+\tilde{r}(y)$ dla dowolnych $x,y \in X$, oraz funkcja ekstremalna f na X nie większa niż $\tilde{r}$.*

(2) *Dla $f \in \varepsilon X$ i $a \in X$ mamy $f(a) = \sup|f - f_a|$.*

(3) *Dla dowolnych $f \in \varepsilon X$, $\delta > 0$ i $a \in X$ istnieje taki punkt $x \in X$, że $f(a) + f(x) < d(a,x) + \delta$.*

(4) *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ekstremalnych jest funkcją ekstremalną.*

Dowód. (1) Ustalmy $a \in A$ i połóżmy

$$\tilde{r}(x) := \begin{cases} d(x,a) + r(a) & \text{dla } x \in X \setminus A, \\ r(x) & \text{dla } x \in A. \end{cases}$$

Gdy $x,y \in A$, to $d(x,y) \leqslant r(x) + r(y) = \tilde{r}(x) + \tilde{r}(y)$. Gdy $x \in X \setminus A$ i $y \in A$, wówczas $d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y) \leqslant d(x,a) + r(a) + r(y) = \tilde{r}(x) + \tilde{r}(y)$. Wreszcie, gdy $x,y \in X \setminus A$, mamy $d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y) \leqslant d(x,a)+r(a)+d(y,a)+r(a) = \tilde{r}(x)+\tilde{r}(y)$. Druga część tezy wynika z lematu Kuratowskiego–Zorna w sposób analogiczny jak w dowodzie lematu 2.3.3.

(2) Ponieważ dla $a,x \in X$ mamy $f_a(x) = d(a,x) \leqslant f(a) + f(x)$ oraz $f(x) \leqslant f(a) + d(a,x) = f(a) + f_a(x)$, zatem $|f(x) - f_a(x)| \leqslant f(a)$. Stąd $\sup|f - f_a| \leqslant f(a)$. Z drugiej strony, dla $x = a$ otrzymujemy $|f(x) - f_a(x)| = f(a)$, więc $\sup|f - f_a| = f(a)$.

(3) Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieją takie $f \in \varepsilon X$, $a \in X$ oraz $\delta > 0$, że dla dowolnego $x \in X$ zachodzi nierówność $d(a,x)+\delta \leqslant f(a)+f(x)$. Możemy przy tym założyć, że $\delta \leqslant f(a)$. Zdefiniujmy dla $x \in X$ funkcję

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \neq a, \\ f(a) - \delta & \text{dla } x = a. \end{cases}$$

Dla $x,y \in X$ mamy $d(x,y) \leqslant g(x) + g(y)$. (Ponownie wystarczy sprawdzić przypadek $x = a \neq y$; wówczas $d(x,y) \leqslant f(x) + f(y) - \delta = g(x) + g(y)$.) Ponadto $0 \leqslant g \leqslant f$ i $g \neq f$, co jest sprzeczne z minimalnością f.

(4) Niech $\langle f_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji ekstremalnych na X zbieżnym jednostajnie do pewnej funkcji $f\colon X \to [0,+\infty)$. Oczywiście $d(x,y) \leqslant f(x)+f(y)$ dla $x, y \in X$. Załóżmy, że f nie jest punktowo minimalna; oznacza to, że istnieje taka funkcja $g\colon X \to [0,+\infty)$, że $g \leqslant f$ i $g \neq f$ oraz $d(x,y) \leqslant g(x)+g(y)$ dla $x, y \in X$. Niech $a \in X$ będzie punktem, w którym $g(a) < f(a)$ i niech $\delta := f(a) - g(a)$. Wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, by $\sup|f_N - f| < \frac{\delta}{3}$. Z punktu (3) wynika istnienie takiego punktu $x \in X$, że $f_N(a) + f_N(x) < d(a,x) + \frac{\delta}{3}$. Otrzymujemy więc: $g(a) + g(x) = f(a) - \delta + g(x) \leqslant f(a) + f(x) - \delta \leqslant f_N(a) + \frac{\delta}{3} + f_N(x) + \frac{\delta}{3} - \delta = f_N(a) + f_N(x) - \frac{\delta}{3} < d(a,x)$ – sprzeczność. □

Uwaga 2.3.5. Zauważmy, że punkt (2) powyższego lematu jest uogólnieniem wzoru (5) lematu 2.3.2.

Jak dotąd badaliśmy jedynie własności pojedynczych funkcji ekstremalnych. Wprowadzimy teraz metrykę w ich zbiorze i wykażemy kilka własności przestrzeni funkcji ekstremalnych.

Definicja 2.3.4. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Odległość dwóch funkcji ekstremalnych $f, g \in \varepsilon X$ zdefiniujemy wzorem $d(f,g) := \sup|f - g|$.

Spełnianie przez powyżej określoną funkcję d aksjomatów metryki jest trywialną konsekwencją własności wartości bezwzględnej i monotoniczności operacji supremum funkcji. Jedynym nieoczywistym faktem może być *skończoność* funkcji d (pamiętajmy, że funkcje ekstremalne mogą być nieograniczone!). Fakt ten oraz pewne inne własności εX jako przestrzeni metrycznej są treścią poniższego lematu.

Lemat 2.3.5. *Niech X będzie przestrzenią metryczną.*

(1) *Funkcja $d\colon \varepsilon X \times \varepsilon X \to [0,+\infty)$ z definicji 2.3.4 jest metryką na εX, przy czym odwzorowanie $e\colon X \to \varepsilon X$ (zob. definicja 2.3.3) jest zanurzeniem izometrycznym.*

(2) *Jeśli $f \in \varepsilon X$, to $f \leqslant \operatorname{diam} X$; w szczególności $\operatorname{diam} \varepsilon X = \operatorname{diam} X$.*

(3) *Jeśli X jest zwarta, to εX jest również zwarta.*

(4) *Jeśli s jest funkcją ekstremalną na εX, to $s \circ e$ jest funkcją ekstremalną na X.*

Dowód. (1) Wystarczy pokazać, że d przyjmuje wartości skończone. Niech $f, g \in \varepsilon X$. Obierzmy $a \in X$. Na mocy punktu (2) lematu 2.3.4 mamy: $d(f,g) = \sup|f-g| \leqslant \sup(|f - f_a| + |f_a - g|) \leqslant \sup|f - f_a| + \sup|g - f_a| = f(a) + g(a) < +\infty$. Druga część tezy jest równoważnym sformułowaniem punktu (5) lematu 2.3.2.

(2) Gdy X jest nieograniczona, nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że X jest ograniczona. Gdyby było $f(a) > \operatorname{diam} X$ dla pewnego $a \in X$, to kładąc $h(x) := \min\{f(x), \operatorname{diam} X\}$ dla $x \in X$ otrzymalibyśmy $h \leqslant f$, $h \neq f$ oraz $d(x,y) \leqslant h(x) + h(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$ – sprzeczność z ekstremalnością f. Stąd dla dowolnych $f \in \varepsilon X$, $x \in X$ mamy $f(x) \in [0, \operatorname{diam} X]$

i w konsekwencji $\operatorname{diam} \varepsilon X \leqslant \operatorname{diam} X$. Nierówność przeciwna wynika z drugiej części punktu (1).

(3) Każda funkcja $f \in \varepsilon X$ jest nierozszerzająca, więc εX jest rodziną funkcji jednakowo jednostajnie ciągłych. Z punktu (2) wynika, że wszystkie funkcje ekstremalne na X są wspólnie ograniczone. Z lematu Arzeli i z punktu (4) lematu 2.3.4 wynika więc, że εX jest zwartym podzbiorem $\mathcal{C}(X)$.

(4) Niech s będzie funkcją ekstremalną na εX (czyli $s \in \varepsilon\varepsilon X$). Dla $x, y \in X$ mamy $d(x,y) = d(f_x, f_y) \leqslant s(f_x) + s(f_y) = (s \circ e)(x) + (s \circ e)(y)$. Pozostaje wykazać minimalność $s \circ e$. Załóżmy więc, że istnieje funkcja ekstremalna $h \in \varepsilon X$ nieprzekraczająca $s \circ e$ oraz punkt $a \in X$, w którym $h(a) < (s \circ e)(a)$. Zdefiniujmy funkcję $t \colon \varepsilon X \to [0, +\infty)$ wzorem:

$$t(f) := \begin{cases} s(f) & \text{dla } f \neq f_a, \\ h(a) & \text{dla } f = f_a. \end{cases}$$

Widać, że $t \leqslant s$ i $t \neq s$. Pokażemy, że $d(f,g) \leqslant t(f) + t(g)$ dla $f, g \in \varepsilon X$, co będzie sprzeczne z ekstremalnością s.
Wystarczy rozważyć przypadek $f \neq f_a = g$. Obierzmy $\delta > 0$. Na mocy punktu (3) lematu 2.3.4 istnieje takie $b \in X$, że $f(a) + f(b) < d(a,b) + \delta$. Rozważmy dwa przypadki.

a) Gdy $a = b$, z powyższej nierówności otrzymujemy $f(a) < \frac{\delta}{2}$; wówczas $d(f, f_a) = f(a) \leqslant t(f) + t(f_a) + \frac{\delta}{2}$.

b) Gdy $a \neq b$, to $d(f, f_a) + f(b) - \delta = f(a) + f(b) - \delta < d(a,b) \leqslant h(a) + h(b) \leqslant h(a) + (s \circ e)(b) = t(f_a) + t(f_b)$. Ponieważ s jest funkcją ekstremalną, mamy $t(f_b) = s(f_b) \leqslant s(f) + d(f, f_b) = t(f) + f(b)$. Dodając obie nierówności stronami widzimy, że $d(f, f_a) + f(b) - \delta + t(f_b) < t(f_a) + t(f_b) + t(f) + f(b)$, czyli $d(f, f_a) < t(f) + t(f_a) + \delta$.
W obu przypadkach, wobec dowolności $\delta > 0$, otrzymujemy tezę. □

W dalszym ciągu zobaczymy, że własność (3) powyższego lematu jest szczególnym przypadkiem punktu (4) lematu 3.2.4. Wynik ten jest interesujący, zobaczymy bowiem, że jest to odpowiednik znanego z analizy funkcjonalnej lematu Mazura.

Głównym rezultatem tego paragrafu jest poniższe twierdzenie, udowodnione przez Isbella. Stanowi ono pozytywną odpowiedź na problem postawiony na początku paragrafu.

Twierdzenie 2.3.6. *Dla dowolnej przestrzeni X, przestrzeń $\langle \varepsilon X, e \rangle$ jest powłoką hiperwypukłą X.*

Dowód. Pokażemy wpierw, że εX jest przestrzenią hiperwypukłą. Niech $\{f_i\}_{i \in I}$ będzie pewnym zbiorem punktów w εX, a $\{r_i\}_{i \in I}$ zbiorem liczb nieujemnych o tej własności, że $d(f_i, f_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$. Określmy odwzorowanie $r \colon \{f_i\}_{i_I} \to [0, +\infty)$ wzorem $r(f_i) := r_i$. Na mocy punktu (1) lematu 2.3.4 istnieje rozszerzenie $\tilde{r} \colon \varepsilon X \to [0, +\infty)$ funkcji r spełniające warunek $d(f,g) \leqslant \tilde{r}(f) + \tilde{r}(g)$ dla $f, g \in \varepsilon X$ oraz funkcja ekstremalna $s \in \varepsilon\varepsilon X$ nieprzekraczająca $\tilde{r}$. Z punktu (4) lematu 2.3.5 wiemy, że $s \circ e \in \varepsilon X$. Niech $f \in \varepsilon X$ będzie dowolna. Dla każdego $x \in X$ mamy: $(s \circ e)(x) - f(x) = s(f_x) - d(f, f_x) \leqslant s(f) \leqslant \tilde{r}(f)$ oraz $f(x) - (s \circ e)(x) = d(f, f_x) - s(f_x) \leqslant s(f) \leqslant \tilde{r}(f)$, a stąd $|(s \circ e)(x) - f(x)| \leqslant \tilde{r}(f)$ i wobec dowolności $x \in X$ otrzymujemy $d(s \circ e, f) = \sup|s \circ e - f| \leqslant \tilde{r}(f)$. Zatem $s \circ e \in \bar{B}(f, \tilde{r}(f))$ dla każdej funkcji $f \in \varepsilon X$ i w szczególności $s \circ e \in \bigcap_{i \in I} \bar{B}(f_i, r_i)$ i stąd przekrój ten jest niepusty.

Załóżmy teraz, że Y jest taką przestrzenią hiperwypukłą, że $e(X) \subseteq Y \subseteq \varepsilon X$. Wobec wniosku 2.2.8 istnieje nierozszerzająca retrakcja $R\colon \varepsilon X \to Y$. Niech $f \in \varepsilon X$. Mamy: $R(f)(x) = d(R(f), f_x) = d(R(f), R(e(x))) \leqslant d(f, e(x)) = d(f, f_x) = f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Stąd $R(f) = f$ dla każdego $f \in \varepsilon X$, a to oznacza, że retrakcja $R\colon \varepsilon X \to Y$ jest identycznością; zatem $Y = \varepsilon X$. □

Uwaga 2.3.6. Zauważmy, że $e_{\varepsilon X}\colon \varepsilon X \to \varepsilon\varepsilon X$ jest izometrią. Istotnie, na mocy punktu (1) lematu 2.3.5 wystarczy pokazać, że $e_{\varepsilon X}$ jest suriekcją; ale to jest natychmiastową konsekwencją definicji powłoki hiperwypukłej oraz hiperwypukłości εX.

Wniosek 2.3.7. *Klasa przestrzeni hiperwypukłych pokrywa się z klasą absolutnych retraktów nierozszerzających.*

Dowód. W świetle wniosku 2.2.8 wystarczy pokazać, że każdy absolutny retrakt nierozszerzający jest hiperwypukły. Niech X będzie takim retraktem; zatem podprzestrzeń $e(X) \subseteq \varepsilon X$ (jako izometryczna z X) również ma tę własność. Istnieje zatem nierozszerzająca retrakcja $R\colon \varepsilon X \to e(X)$ przestrzeni hiperwypukłej εX na $e(X)$; na mocy twierdzenia 2.2.9 przestrzeń $e(X)$, a zatem i X, jest hiperwypukła. □

Uwagi

Definicja 2.1.1 pochodzi z pracy [1]. W tej samej pracy zdefiniowano pewne pojęcia pokrewne, jak np. tzw. *własność* (P), przedyskutowano związki między nimi, w szczególności te opisane w uwagach 2.1.1 i 2.1.2, oraz udowodniono twierdzenie 2.1.5. Twierdzenie 2.1.1 oraz przykłady 2.1.2 zaczerpnąłem z pracy [10]. Warto zauważyć, że hiperwypukłość płaszczyzny z metryką „maksimum" (przykład 2.1.2) można wykorzystać do dowodu charakteryzacji hiperwypukłych, dwuwymiarowych przestrzeni Banacha: są to dokładnie te przestrzenie, w których kula ma dokładnie cztery punkty ekstremalne (zob. [4]). Twierdzenie 2.1.2 można znaleźć m.in. w [14]; twierdzenie 2.1.3 jest cytowane w [1]. Przykłady 2.1.3 zostały podane w [6], zaś praca [4] zawiera ich wspólne uogólnienie, czyli twierdzenie 2.1.4. Definicje 2.1.4 i 2.1.5 oraz większość następujących po nich własności jest wykazana bądź wspomniana w [10]. Twierdzenie 2.1.9 zostało wykazane (przy nieco innych założeniach) w pracy [2]; w tejże pracy zaanonsowano wynik wniosku 2.1.10.

Większość paragrafu 2.2 pochodzi z prac [1] oraz [10]; dowód twierdzenia Hahna–Banacha 2.2.1 powołujący się na hiperwypukłość prostej podałem za [10]. Pojęcie modułu ciągłości i jego własności oraz twierdzenia 2.2.4 i 2.2.10 cytuję za [1];

alternatywne metody dowodu twierdzenia 2.2.10 pochodzą z [10]. Wniosek 2.2.8 wykazano w [1], a twierdzenie 2.2.9 w [10].

W zasadzie wszystkie wyniki paragrafu 2.3 podaję za [10]; twierdzenie 2.3.6 wykazał Isbell w [13]. Odnotujmy, że Espínola i Khamsi [10] stosują charakteryzację z lematu 2.3.3 jako definicję funkcji ekstremalnej.

Rozdział 3

Punkty stałe operatorów w przestrzeniach hiperwypukłych

W tym rozdziale wykażemy kilka twierdzeń o punkcie stałym. Zaczniemy od klasycznego twierdzenia Baillona o niepustości i hiperwypukłości zbioru punktów stałych odwzorowania nierozszerzającego przestrzeni hiperwypukłej ograniczonej w siebie. Jako wniosek z twierdzenia Baillona udowodnimy jednoznaczność z dokładnością do izometrii powłoki hiperwypukłej, a następnie wykażemy, że w przypadku podzbioru przestrzeni unormowanej suma odwzorowania nierozszerzającego i odwzorowania zwartego również ma punkt stały (przy pewnych dodatkowych warunkach).

Drugi paragraf jest poświęcony twierdzeniom typu Schaudera, Darbo–Sadowskiego oraz Möncha. Pokazujemy najpierw, że zwarte odwzorowanie przestrzeni hiperwypukłej w siebie ma punkt stały. Dowód wykorzystuje m.in. kilka centralnych wyników rozdziału 2: konstrukcję Isbella powłoki hiperwypukłej dowolnej przestrzeni, które pozwala zanurzyć każdą przestrzeń zwartą w $\mathcal{C}(K)$, zwartość powłoki hiperwypukłej przestrzeni zwartej, twierdzenie o rozszerzaniu odwzorowań jednostajnie ciągłych o wartościach w przestrzeni hiperwypukłej oraz klasyczne twierdzenie Schaudera.

W dalszej części paragrafu 3.2 wprowadzamy pojęcia miar niezwartości (Hausdorffa i Kuratowskiego), dowodzimy kilku znanych ich własności, a także pokazujemy, że operacja brania powłoki hiperwypukłej nie zmienia miary niezwartości. Własności te pozwolą nam udowodnić twierdzenie typu Darbo–Sadowskiego, które wykazał Espínola. Na zakończenie uogólnimy ten wynik, pokazując, że można w nim opuścić założenie ograniczoności oraz rozważać klasę odwzorowań szerszą niż odwzorowania zgęszczające.

3.1. Twierdzenie Baillona o punkcie stałym i pewne jego rozszerzenie

Zajmiemy się najpierw twierdzeniem o punkcie stałym dla odwzorowań nierozszerzających.

Twierdzenie 3.1.1. *Niech X będzie przestrzenią hiperwypukłą ograniczoną, a $T\colon X \to X$ odwzorowaniem nierozszerzającym. Wówczas T ma przynajmniej jeden punkt stały.*

Dowód. Niech $\Sigma := \{A \subseteq X : A \in \mathcal{A}(X), T(A) \subseteq A\}$. Rodzina Σ, uporządkowana relacją inkluzji, spełnia założenia lematu Kuratowskiego–Zorna. Niech $\widetilde{A}$ będzie minimalny w Σ. Pokażemy, że $\widetilde{A} = \operatorname{cov} T(\widetilde{A})$. Ponieważ $T(\widetilde{A}) \subseteq \widetilde{A}$ i $\operatorname{cov} T(\widetilde{A})$ jest najmniejszym zbiorem dopuszczalnym zawierającym $T(\widetilde{A})$, więc $\operatorname{cov} T(\widetilde{A}) \subseteq \widetilde{A}$. Stąd $T(\operatorname{cov} T(\widetilde{A})) \subseteq T(\widetilde{A}) \subseteq \operatorname{cov} T(\widetilde{A})$, a zatem $\operatorname{cov} T(\widetilde{A}) \in \Sigma$. Z minimalności $\widetilde{A}$ wnosimy, że $\operatorname{cov} T(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$.

Zauważmy, że dla $x \in X$ mamy równość $r_x(\widetilde{A}) = r_x(T(\widetilde{A}))$. Istotnie, $T(\widetilde{A}) \subseteq \widetilde{A}$, więc $r_x(T(\widetilde{A})) \leqslant r_x(\widetilde{A})$. Gdyby dla pewnego $x \in X$ zachodziła nierówność $r_x(T(\widetilde{A})) < r_x(\widetilde{A})$, wówczas istniałoby takie $y \in \widetilde{A}$, że $r_x(T(\widetilde{A})) < d(x, y)$, a stąd $y \notin \bar{B}(x, r_x(T(\widetilde{A})))$ i tym bardziej $y \notin \operatorname{cov} T(\widetilde{A})$.

Niech $C := C_{\tilde{A}}(\widetilde{A}) = \bigcap_{x \in \tilde{A}} \bar{B}_{\tilde{A}}(x, r(\widetilde{A}))$. Ponieważ $\widetilde{A}$ jest hiperwypukły, więc $C \neq \emptyset$ (punkt (4) lematu 2.1.7). Zauważmy, że C jest dopuszczalny w X jako przekrój zbiorów dopuszczalnych: $C = \widetilde{A} \cap \bigcap_{x \in \tilde{A}} \bar{B}_X(x, r(\widetilde{A}))$. Wykażemy, że $T(C) \subseteq C$. Niech $y \in T(C)$, wówczas $y = T(x)$ dla pewnego $x \in C$. Mamy wtedy: $r_y(\widetilde{A}) = r_y(T(\widetilde{A})) = \sup_{z \in T(\tilde{A})} d(y, z) = \sup_{w \in \tilde{A}} d(T(x), T(w)) \leqslant \sup_{w \in \tilde{A}} d(x, w) = r_x(\widetilde{A}) = \frac{1}{2} \operatorname{diam} \widetilde{A} = r_{\tilde{A}}(\widetilde{A})$. Z drugiej strony $r_y(\widetilde{A}) \geqslant r_{\tilde{A}}(\widetilde{A})$; zatem $r_y(\widetilde{A}) = r_{\tilde{A}}(\widetilde{A})$ i w konsekwencji $y \in C$. Mamy zatem $C \in \Sigma$ oraz $C \subseteq \widetilde{A}$; ale $\widetilde{A}$ jest minimalny w Σ, więc $C = \widetilde{A}$. Na mocy hiperwypukłości $\widetilde{A}$ i punktu (5) lematu 2.1.7 zbiór $\widetilde{A}$ jest jednopunktowy; oznaczmy jego jedyny element przez a. Z warunku $T(\widetilde{A}) \subseteq \widetilde{A}$ wynika, że $T(a) = a$, czyli a jest punktem stałym odwzorowania T. □

Uwaga 3.1.1. Jak łatwo zauważyć na przykładzie przestrzeni $X := \mathbb{R}$ i odwzorowania $x \mapsto x + 1$, założenie ograniczoności jest w powyższym twierdzeniu istotne.

Wykażemy teraz pewien wniosek z udowodnionego właśnie twierdzenia; w przeciwieństwie do pracy [2], nie włączyliśmy go do jego treści, ponieważ we wniosku tym można istotnie osłabić założenia.

Wniosek 3.1.2. *Niech $T\colon X \to X$ będzie nierozszerzającym odwzorowaniem przestrzeni hiperwypukłej X w siebie posiadającym choć jeden punkt stały. Wówczas zbiór punktów stałych odwzorowania T jest hiperwypukły.*

Dowód. Niech $F := \{x \in X : x = T(x)\}$. Niech $\{\bar{B}_F(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ będzie taką rodziną kul domkniętych w F, że $d(x_i, x_j) \leqslant r_i + r_j$ dla $i, j \in I$. Niech $A := \bigcap_{i \in I} \bar{B}_X(x_i, r_i)$; z hiperwypukłości X wiemy, że A jest niepusty, a więc hiperwypukły (jako dopuszczalny podzbiór X). Oczywiście A jest też ograniczony. Zauważmy, że skoro każdy punkt x_i jest punktem stałym odwzorowania T, to dla dowolnego $y \in A$ oraz $i \in I$ mamy $d(x_i, T(y)) = d(T(x_i), T(y)) \leqslant d(x_i, y) \leqslant r_i$, czyli $T(y) \in \bar{B}_X(x_i, r_i)$ dla każdego $i \in I$; to zaś oznacza, że $T(y) \in A$. Stąd obcięcie $T|_A$ jest nierozszerzającym odwzorowaniem ograniczonej przestrzeni hiperwypukłej A w siebie. Z twierdzenia 3.1.1 wynika zatem, że ma ono punkt stały, czyli $A \cap F \neq \emptyset$. Wobec równości $A \cap F = \bigcap_{i \in I} \bar{B}_F(x_i, r_i)$ dowód wniosku jest więc zakończony. □

Dysponując wnioskiem 3.1.2, możemy teraz sformułować i udowodnić twierdzenie o jednoznaczności powłoki hiperwypukłej, zapowiadane w uwadze 2.3.2.

Twierdzenie 3.1.3. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $\langle Y_1, e_1\rangle$, $\langle Y_2, e_2\rangle$ dwiema jej powłokami hiperwypukłymi (w sensie definicji 2.3.1). Istnieje wówczas taka izometria $i\colon Y_1 \to Y_2$, że odwzorowanie $e_2^{-1} \circ i \circ e_1$ jest identycznością na X.*

Dowód. Niech $i_1\colon e_1(X) \to Y_2$ będzie zdefiniowane wzorem $i_1(e_1(x)) := e_2(x)$ dla $x \in X$; ponieważ $e_1\colon X \to Y_1$ jest iniekcją, więc i_1 jest dobrze określone. Ponadto i_1 jest zanurzeniem izometrycznym, ponieważ dla $x_1, x_2 \in X$ mamy równości $d(i_1(e_1(x_1)), i_1(e_1(x_2))) = d(e_2(x_1), e_2(x_2)) = d(x_1, x_2) = d(e_1(x_1), e_2(x_2))$; w szczególności i_1 jest nierozszerzające. Na mocy wniosku 2.2.5 istnieje przedłużenie i_1 do odwzorowania nierozszerzającego $\tilde{\imath}_1\colon Y_1 \to Y_2$. Analogicznie wykazujemy istnienie odwzorowania nierozszerzającego $\tilde{\imath}_2\colon Y_2 \to Y_1$ o tej własności, że $\tilde{\imath}_2|_{e_2(X)} = e_1 \circ e_2^{-1}$. Rozważmy odwzorowanie $T\colon Y_1 \to Y_1$ określone wzorem $T := \tilde{\imath}_2 \circ \tilde{\imath}_1$. Oczywiście jest to odwzorowanie nierozszerzające przestrzeni metrycznej Y_1 w siebie; ponadto obcięcie $T|_{e_1(X)}$ jest zanurzeniem identycznościowym (istotnie, dla $y_1 \in e_1(X)$ mamy $T(y_1) = \tilde{\imath}_2 \circ \tilde{\imath}_1(y_1) = \tilde{\imath}_2 \circ i_1(y_1) = \tilde{\imath}_2 \circ e_2 \circ e_1^{-1}(y_1) = e_1 \circ e_2^{-1} \circ e_2 \circ e_1^{-1}(y_1) = y_1$). Oznaczając przez F zbiór punktów stałych odwzorowania T otrzymujemy stąd inkluzje $e_1(X) \subseteq F \subseteq Y_1$; ale F jest hiperwypukły na mocy wniosku 3.1.2, zaś Y_1 jest powłoką hiperwypukłą $e_1(X)$; stąd $F = Y_1$, więc T jest po prostu identycznością na Y_1. Połóżmy teraz $i := \tilde{\imath}_1$. Widać od razu, że $e_2^{-1} \circ i \circ e_1$ jest identycznością na X. Gdyby i nie było izometrią, wówczas dla pewnych $x_1, x_2 \in X$ byłoby $d(i(x_1), i(x_2)) < d(x_1, x_2)$ (ponieważ i jest nierozszerzające); ale wówczas, jako że $\tilde{\imath}_2$ również jest nierozszerzające, mielibyśmy $d(T(x_1), T(x_2)) = d(\tilde{\imath}_2(i(x_1)), \tilde{\imath}_2(i(x_2))) \leqslant d(i(x_1), i(x_2)) < d(x_1, x_2)$, co przeczy temu, że T jest identycznością. Dowód jest więc zakończony. □

Udowodnimy teraz pewne rozszerzenie twierdzenia Baillona 3.1.1. W tym celu przytoczymy najpierw (bez dowodu) następujące twierdzenie, będące wspólnym uogólnieniem klasycznego twierdzenia Schaudera o punkcie stałym oraz twierdzenia 3.2.1, które wykażemy w następnym paragrafie.

Twierdzenie 3.1.4. *Dowolne zwarte odwzorowanie retraktu absolutnego w siebie ma punkt stały.*

Twierdzenie 3.1.5. *Niech $K \neq \emptyset$ będzie hiperwypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni unormowanej X. Załóżmy, że:*

(1) *$T_1\colon K \to X$ jest odwzorowaniem nierozszerzającym,*
(2) *$T_2\colon K \to X$ jest odwzorowaniem zwartym,*
(3) *$T(x) := T_1(x) + T_2(x) \in K$ dla dowolnego $x \in K$,*

(4) *każdy taki ciąg* $\langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ *elementów* K, *że* $\lim_{n\to\infty}(x_n - T(x_n)) = 0$, *ma punkt skupienia.*

Wówczas odwzorowanie T *ma punkt stały.*

Dowód. Z wniosku 2.2.8 wnosimy, że istnieje nierozszerzająca retrakcja $R\colon X \to K$; niech $R_q\colon X \to K$ będzie zdefiniowane wzorem $R_q(x) := R(\frac{1}{q}x)$ dla $q \in (1, +\infty)$. Dla dowolnych $y \in K$ i $q > 1$ określmy odwzorowanie $T_{y,q}\colon K \to K$ wzorem $T_{y,q}(x) := R_q(T_1(x) + T_2(y))$. Oczywiście jest ono kontrakcją, ponieważ $\|T_{y,q}(x_1) - T_{y,q}(x_2)\| = \|R_q(T_1(x_1) + T_2(y)) - R_q(T_1(x_2) + T_2(y))\| \leqslant \frac{1}{q}\|T_1(x_1) - T_1(x_2)\| \leqslant \frac{1}{q}\|x_1 - x_2\|$ dla $x_1, x_2 \in K$, zaś $\frac{1}{q} \in (0, 1)$. Oznaczmy jego jedyny punkt stały przez $u_q(y)$; otrzymujemy w ten sposób dla każdego $q > 1$ funkcję $u_q\colon K \to K$ o tej własności, że

$$u_q(y) = R_q\big(T_1(u_q(y)) + T_2(y)\big)$$

dla $y \in K$ i $q > 1$; w szczególności $\|u_q(y_1) - u_q(y_2)\| = \|R_q(T_1(u_q(y_1)) + T_2(y_1)) - R_q(T_1(u_q(y_2)) + T_2(y_2))\| \leqslant \frac{1}{q}(\|u_q(y_1) - u_q(y_2)\| + \|T_2(y_1) - T_2(y_2)\|)$, czyli

$$\|u_q(y_1) - u_q(y_2)\| \leqslant \tfrac{q}{q-1}\|T_2(y_1) - T_2(y_2)\|$$

dla $y_1, y_2 \in K$.

Pokażemy ciągłość odwzorowania u_q. Niech $\varepsilon > 0$; korzystając z ciągłości T_2, wybierzmy takie $\delta > 0$, by dla $y_1, y_2 \in K$ spełniających $\|y_1 - y_2\| < \delta$ zachodziła nierówność $\|T_2(y_1) - T_2(y_2)\| < \frac{q-1}{q}\varepsilon$; wówczas $\|u_q(y_1) - u_q(y_2)\| \leqslant \frac{q}{q-1}\|T_2(y_1) - T_2(y_2)\| < \varepsilon$ i w konsekwencji u_q jest ciągłe.

Udowodnimy teraz, że $u_q\colon K \to K$ jest odwzorowaniem zwartym. Niech $\langle y_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem elementów z K; ponieważ T_2 jest zwarte, więc istnieje taki podciąg $\langle y_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$, że ciąg $\langle T_2(y_{n_k})\rangle_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Wybierzmy dowolne $\varepsilon > 0$; oczywiście istnieje takie N, że dla $k_1, k_2 \geqslant N$ mamy $\|T_2(y_{n_{k_1}}) - T_2(y_{n_{k_2}})\| < \frac{q-1}{q}\varepsilon$; z wykazanego wcześniej oszacowania otrzymujemy $\|u_q(y_{n_{k_1}}) - u_q(y_{n_{k_2}})\| < \varepsilon$ dla $k_1, k_2 \geqslant N$. Ciąg $\langle u_q(y_{n_k})\rangle_{k=1}^{\infty}$ jest zatem ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni zupełnej K. Z dowolnego ciągu elementów $u_q(K)$ możemy więc wyrwać podciąg zbieżny, co oznacza zwartość odwzorowania u_q.

Z twierdzenia 3.1.4 oraz wniosku 2.2.8 wynika, że dla każdego $q > 1$ odwzorowanie u_q ma punkt stały. Niech $\langle q_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych większych od 1 zbieżnym do jedności; przez y_n^0 oznaczymy punkt stały odwzorowania $u_{q_n}\colon K \to K$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Mamy wówczas:

$$\begin{aligned}
\|y_n^0 - T(y_n^0)\| &= \|u_{q_n}(y_n^0) - (T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0))\| = \\
&= \|R_{q_n}(T_1(u_{q_n}(y_n^0)) + T_2(y_n^0)) - (T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0))\| = \\
&= \|R_{q_n}(T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0)) - (T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0))\| = \\
&= \|\tfrac{1}{q_n}(T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0)) - (T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0))\| = \\
&= \tfrac{q_n-1}{q_n}\|T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0)\| = \tfrac{q_n-1}{q_n}\|T(y_n^0)\|.
\end{aligned}$$

Ponieważ zbiór K jest ograniczony, z powyższego wyliczenia wnosimy, że $\lim_{n\to\infty}\|y_n^0 - T(y_n^0)\| = 0$, a zatem z założenia (4) ciąg $\langle y_n^0\rangle_{n=1}^{\infty}$ ma podciąg zbieżny; bez straty ogólności załóżmy, że ciąg $\langle y_n^0\rangle_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny i niech $y_0 := \lim_{n\to\infty} y_n^0$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
T(y_0) &= R(T(y_0)) = R(T(\lim_{n\to\infty} y_n^0)) = \\
&= R\Big(\lim_{n\to\infty}(T(y_n^0))\Big) = \\
&= R\Big(\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{q_n}(T_1(y_n^0) + T_2(y_n^0))\Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} R_{q_n}\Big(T_1(u_{q_n}(y_n^0)) + T_2(y_n^0)\Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty} u_{q_n}(y_n^0) = \lim_{n\to\infty} y_n^0 = y_0
\end{aligned}$$

i dowód jest zakończony. □

3.2. Twierdzenie typu Darbo–Sadowskiego i pewne jego uogólnienie

Na początek wykażemy twierdzenie o punkcie stałym typu Schaudera. Jakkolwiek jest ono natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 3.1.4, to można podać jego prosty dowód wykorzystujący przedstawione w poprzednim rozdziale własności przestrzeni hiperwypukłych.

Twierdzenie 3.2.1. *Niech X będzie przestrzenią hiperwypukłą, a $T\colon X \to X$ odwzorowaniem zwartym. Wówczas T ma punkt stały.*

Dowód. Z wniosku 2.3.1 wiemy, że $\overline{T(X)}$ ma w X powłokę hiperwypukłą K. Z twierdzenia 3.1.3 oraz punktu (3) lematu 2.3.5 wynika, że K jest zbiorem zwartym. Na mocy twierdzenia 2.3.6 odwzorowanie $e\colon K \to \varepsilon K$ jest suriekcją, a zatem izometrią i w szczególności homeomorfizmem, więc εK również jest zwarty. Niech odwzorowanie $T_{\varepsilon K}\colon \varepsilon K \to \varepsilon K$ będzie określone wzorem $T_{\varepsilon K} := e \circ T \circ e^{-1}$. Oczywiście jest ono jednostajnie ciągłe (jako ciągłe odwzorowanie określone na przestrzeni zwartej); z uwag 2.1.2 i 2.2.2 wynika, że jego minimalny moduł ciągłości jest subaddytywny. Twierdzenie 2.2.4 pozwala rozszerzyć odwzorowanie $T_{\varepsilon K}$ w sposób ciągły do odwzorowania $\widetilde{T}_{\varepsilon K}\colon \overline{\operatorname{conv}}_{\mathcal{C}(K)}\,\varepsilon K \to \varepsilon K \subseteq \overline{\operatorname{conv}}_{\mathcal{C}(K)}\,\varepsilon K$, gdzie $\overline{\operatorname{conv}}_{\mathcal{C}(K)}\,\varepsilon K$ oznacza domkniętą powłokę wypukłą zbioru εK w przestrzeni Banacha $\mathcal{C}(K)$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przestrzeni K. Jest oczywiste, że $\widetilde{T}_{\varepsilon K}$ jest odwzorowaniem zwartym; klasyczne twierdzenie Schaudera implikuje, że ma ono punkt stały $x_0 \in \varepsilon K = e(K)$. Pokażemy, że $e^{-1}(x_0)$ jest punktem stałym odwzorowania T:

$$\begin{aligned}
T(e^{-1}(x_0)) &= e^{-1}\circ e \circ T \circ e^{-1}(x_0) = \\
&= e^{-1}(T_{\varepsilon K}(x_0)) = e^{-1}(\widetilde{T}_{\varepsilon K}(x_0)) = e^{-1}(x_0).
\end{aligned}$$ □

Wniosek 3.2.2. *Każde ciągłe odwzorowanie zwartej przestrzeni hiperwypukłej w siebie ma punkt stały.*

Znanym uogólnieniem twierdzenia Schaudera jest twierdzenie Darbo–Sadowskiego (zob. np. [9, s. 131, Theorem 4]). Zamiast odwzorowania zwartego występuje w nim odwzorowanie należące do szerszej klasy tzw. „odwzorowań μ-zgęszczających" (ang. *μ-condensing mappings*). Aby zdefiniować tę klasę odwzorowań, przytoczymy najpierw definicje i własności miar niezwartości Hausdorffa i Kuratowskiego.

Definicje 3.2.1. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Infimum zbioru liczb dodatnich ε, dla których istnieje pokrycie skończone zbioru A kulami domkniętymi w X o promieniach mniejszych bądź równych ε, nazywamy *miarą niezwartości Hausdorffa zbioru A (względem przestrzeni X)* i oznaczamy $\chi_X(A)$, zaś *miarą niezwartości Kuratowskiego zbioru A (względem przestrzeni X)* $\alpha_X(A)$ nazywamy infimum zbioru tych liczb $\varepsilon > 0$, dla których istnieje pokrycie skończone zbioru A zbiorami w X o średnicy nie większej niż ε. Gdy nie będzie wątpliwości, w jakiej przestrzeni jest zanurzony zbiór A, będziemy pisali $\chi(A)$ i $\alpha(A)$ w miejsce $\chi_X(A)$ i $\alpha_X(A)$.

Uwaga 3.2.1. Będziemy korzystać z oczywistego faktu, że jeśli $i\colon X \to Y$ jest izometrią przestrzeni metrycznych X i Y oraz $i(A) = B$ dla pewnych $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, to $\mu_X(A) = \mu_Y(B)$ dla $\mu = \chi$ lub $\mu = \alpha$.

Następujący lemat opisuje związki między obiema wprowadzonymi miarami niezwartości.

Lemat 3.2.3. *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X.*

(1) $\chi(A) \leqslant \alpha(A) \leqslant 2\chi(A)$;

(2) *jeśli X jest hiperwypukła, to* $\alpha(A) = 2\chi(A)$;

(3) $\alpha(\varepsilon X) \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big)$.

Dowód. (1) Pierwsza nierówność wynika stąd, że jeśli $C \subseteq X$ jest zbiorem o średnicy d, to $C \subseteq \bar{B}_X(x, d)$ dla dowolnego $x \in C$; druga jest konsekwencją oczywistego faktu, że średnica kuli o promieniu r nie przekracza $2r$.

(2) Na mocy punktu (1) lematu 2.1.7, dowolny podzbiór $C \subseteq X$ o średnicy mniejszej niż d jest zawarty w pewnej kuli domkniętej o promieniu $\frac{1}{2}d$.

(3) Gdy X jest nieograniczona, teza zachodzi w sposób oczywisty. Załóżmy więc, że X jest przestrzenią ograniczoną. Niech $d := \operatorname{diam} X = \operatorname{diam} \varepsilon X$ (zob. lemat 2.3.5, punkt (2)). Wybierzmy $\varepsilon > 0$; istnieje wówczas zbiór skończony $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \varepsilon X$ o tej własności, że $e(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{B}_{\varepsilon X}\big(f_i, \chi_{\varepsilon X}(e(X)) + \frac{1}{4}\varepsilon\big)$. Ponadto zwartość odcinka $[0, d]$ gwarantuje takiego zbioru skończonego $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq [0, d]$, że dla każdego $x \in [0, d]$ istnieje takie $j \in J$, że $|x - c_j| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon$. Niech J^I będzie zbiorem wszystkich odwzorowań $\phi\colon I \to J$. Dla dowolnego $\phi \in J^I$ połóżmy $A_\phi := \{s \in \varepsilon\varepsilon X : \sup_{i \in I} |s(f_i) - c_{\phi(i)}| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon\}$; zauważmy, że $\varepsilon\varepsilon X = \bigcup_{\phi \in J^I} A_\phi$. Istotnie, niech $s \in \varepsilon\varepsilon X$ oraz $i \in I$; istnieje taki wskaźnik $j \in J$, że $|s(f_i) - c_j| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon$. Kładąc $\phi(i) := j$ i powtarzając to rozumowanie dla wszystkich $i \in I$ otrzymujemy taką funkcję $\phi \in J^I$, że $s \in A_\phi$.

Oszacujemy teraz średnicę dowolnego zbioru A_ϕ. Niech $s, u \in A_\phi$. Na mocy uwagi 2.3.6 mamy $s = e_{\varepsilon X}(g)$ oraz $u = e_{\varepsilon X}(h)$ dla pewnych $g, h \in \varepsilon X$, zatem $d(s,u) = d\big(e_{\varepsilon X}(g), e_{\varepsilon X}(h)\big) = d(g,h)$. Niech $x \in X$ będzie dowolne; istnieje takie $i \in I$, że $d(f_x, f_i) \leqslant \chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big) + \frac{1}{4}\varepsilon$. Mamy

$$\begin{aligned}|g(x) - h(x)| = |d(g, f_x) - d(h, f_x)| = |s(f_x) - u(f_x)| \leqslant\\ \leqslant |s(f_x) - s(f_i)| + |s(f_i) - c_{\phi(i)}| + |c_{\phi(i)} - u(f_i)| + |u(f_i) - u(f_x)| \leqslant\\ \leqslant d(f_x, f_i) + \tfrac{1}{4}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon + d(f_i, f_x) \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big) + \varepsilon.\end{aligned}$$

a zatem $d(g,h) \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big) + \varepsilon$, czyli $\operatorname{diam} A_\phi \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big) + \varepsilon$ dla wszystkich $\phi \in J^I$. Mamy więc $\alpha(\varepsilon X) \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big) + \varepsilon$ i wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy $\alpha(\varepsilon X) \leqslant 2\chi_{\varepsilon X}\big(e(X)\big)$. □

Uwagi 3.2.2. Zauważmy, że w oczywisty sposób $\chi_Y(A) \leqslant \chi_X(A)$, gdy $A \subseteq X \subseteq Y$. Istotnie, jeśli $\{\bar{B}_X(x_i, r_i) : i \in I\}$ jest pokryciem zbioru A kulami w X, to $\{\bar{B}_Y(x_i, r_i) : i \in I\}$ jest pokryciem zbioru A kulami w Y. Jak zobaczymy w przykładzie 3.2.1, nierówność ta może być ostra. Ponadto przy tych samych oznaczeniach mamy też $\alpha_Y(A) = \alpha_X(A)$; będziemy zatem zawsze stosować zapis $\alpha(A)$ w miejsce $\alpha_X(A)$, co nigdy nie doprowadzi do niejednoznaczności. Wreszcie, gdy $A \subseteq X$ oraz $A \subseteq Y$, gdzie X i Y są dowolnymi przestrzeniami hiperwypukłymi, to $\chi_X(A) = \chi_Y(A)$ na mocy powyższych rozważań oraz punktu (2) lematu 3.2.3.

Przykład 3.2.1. Rozważmy przestrzeń $X := \mathbb{R}^2$ z metryką metra paryskiego (zob. przykład 2.1.3) i niech $A := \{\langle x_1, x_2\rangle \in X : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Wówczas $\alpha(A) = 2$. Istotnie, ponieważ dowolna para punktów z A jest odległa o 2, zatem każdy podzbiór $C \subseteq A$ o średnicy $\operatorname{diam} C < 2$ musi być jednopunktowy. A jest zaś zbiorem nieskończonym, więc nie można go pokryć skończenie wieloma takimi zbiorami. Pokazaliśmy w ten sposób, że $\alpha(A) \geqslant 2$; ale $\operatorname{diam} A = 2$ i stąd $\alpha(A) \leqslant 2$, co kończy dowód. Dalej, $\chi_A(A) = 2$; faktycznie, dla dowolnego $a \in A$ mamy $\bar{B}_A(x, r) = \{a\}$, gdy $r < 2$, oraz $\bar{B}_A(x, r) = A$, gdy $r \geqslant 2$ i rozumujemy jak poprzednio. Wreszcie z punktu (2) lematu 3.2.3 wnosimy, że $\chi_X(A) = 1$.

Zanim podamy dalsze własności miar niezwartości, przypomnimy następującą, klasyczną definicję.

Definicja 3.2.2. Przestrzeń metryczną X nazywamy *prezwartą*, gdy jej uzupełnienie jest przestrzenią zwartą. W szczególności podzbiór przestrzeni metrycznej nazywamy prezwartym, gdy jest prezwarty jako podprzestrzeń.

Uwagi 3.2.3. Zauważmy, że prezwartość przestrzeni X jest równoważna następującej własności: z każdego ciągu elementów przestrzeni X można wyrwać podciąg Cauchy'ego. Ponadto prezwartość podzbioru przestrzeni zupełnej jest równoważna jego warunkowej zwartości, czyli posiadaniu zwartego domknięcia.

Lemat 3.2.4. *Niech μ będzie miarą niezwartości Hausdorffa lub Kuratowskiego, X – przestrzenią metryczną, zaś A i B – podzbiorami X. Wówczas*

(1) *gdy $A \subseteq B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;*

(2) *$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ (w szczególności dla dowolnego $b \in X$ mamy $\mu(A \cup \{b\}) = \mu(A)$);*

(3) *$\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prezwarty;*

(4) *jeśli przestrzeń X jest hiperwypukła oraz $H \in \mathcal{H}(A)$, to $\mu(A) = \mu(H)$.*

Dowód. Własności (1) i (2) są oczywiste.

Dla dowodu własności (3) w przypadku $\mu = \alpha$ zauważmy najpierw, że jeśli A jest zbiorem prezwartym, to $\alpha(A) = 0$. Istotnie, niech $\widetilde{A}$ będzie uzupełnieniem podprzestrzeni A. Obierzmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie pokryciem $\widetilde{A}$ zbiorami o średnicy nie większej niż ε. Ze zwartości $\widetilde{A}$ wynika, że istnieje taki skończony podzbiór $I_0 \subseteq I$, że $\{A_i : i \in I_0\}$ jest pokryciem $\widetilde{A}$ – a więc i A – zbiorami o średnicy nie przekraczającej ε; wobec dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy $\alpha(A) = 0$.

Aby wykazać implikację w przeciwnym kierunku, zastosujemy metodę przekątniową. Załóżmy, że A spełnia warunek $\alpha(A) = 0$. Niech $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem punktów z A i niech $\varepsilon_n := 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy pokrycie skończone $\{A_{1,i} : i \in I_1\}$ podprzestrzeni A zbiorami o średnicy nie większej niż ε_1; oczywiście istnieje taki wskaźnik $i_{1,0} \in I_1$, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ należy do $A_{1,i_{1,0}}$. Niech $\langle x_{1,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ będzie podciągiem ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ składającym się z tych właśnie wyrazów. Mając pewien podciąg $\langle x_{k,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ wybieramy skończone pokrycie $\{A_{k+1,i} : i \in I_{k+1}\}$ podprzestrzeni A zbiorami o średnicy nie większej niż ε_{k+1} i tak obieramy wskaźnik $i_{k+1,0}$, by nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\langle x_{k,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ należało do $A_{k+1,i_{k+1,0}}$; tworzą one podciąg $\langle x_{k+1,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ ciągu $\langle x_{k,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$. W ten sposób konstruujemy indukcyjnie takie ciągi $\langle x_{k,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ dla $k = 1, 2, \ldots$, że pierwszy z nich jest podciągiem ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, a każdy następny jest podciągiem poprzedniego. Zdefiniujmy teraz ciąg $\langle y_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ wzorem $y_n := x_{n,n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście ciąg $\langle y_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne i wybierzmy takie $k \in \mathbb{N}$, by $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon$. Z powyższej konstrukcji wynika, że dla dowolnego $n \geqslant k$ każdy punkt y_n należy do ciągu $\langle x_{k,n} \rangle_{n=1}^{\infty}$ zawartego w zbiorze $A_{k,i_{k,0}}$ o średnicy nie przekraczającej ε_k. Stąd ciąg $\langle y_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ jest podciągiem Cauchy'ego ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ i dowód prezwartości zbioru A jest zakończony.

W przypadku $\mu = \chi$ dowód prezwartości zbioru A spełniającego warunek $\chi(A) = 0$ nie różni się niemal od rozumowania dla $\mu = \alpha$. Załóżmy teraz, że A jest zbiorem prezwartym i niech $\widetilde{A}$ będzie uzupełnieniem A. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $\{\bar{B}_{\widetilde{A}}(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon) : i \in I\}$ będzie skończonym pokryciem $\widetilde{A}$ kulami o promieniu $\frac{1}{2}\varepsilon$. Ponieważ A jest gęsty w $\widetilde{A}$, więc dla każdego $i \in I$ istnieje $y_i \in A \cap \bar{B}_{\widetilde{A}}(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon)$. Z nierówności trójkąta wynika, że $\{\bar{B}_{\widetilde{A}}(y_i, \varepsilon) : i \in I\}$ jest skończonym pokryciem $\widetilde{A}$, a więc $\{\bar{B}_A(y_i, \varepsilon) : i \in I\}$ jest pokryciem A. Stąd $\chi_A(A) = 0$ i wobec uwagi 3.2.2 tym bardziej $\chi_X(A) = 0$.

Udowodnimy własność (4). Mamy $2\chi_X(A) = \alpha(A) \leqslant \alpha(H) \leqslant 2\chi_H(A) = 2\chi_X(A)$, gdzie skorzystaliśmy kolejno z własności (2) lematu 3.2.3, punktu (1) lematu 3.2.4, punktu (3) lematu 3.2.3 oraz uwag 3.2.1 i 3.2.2, co daje tezę dla $\mu = \alpha$. Rozważmy teraz przypadek $\mu = \chi$. Z powyższego oraz z własności (2) lematu 3.2.3 wnosimy, że $\chi_X(A) = \frac{1}{2}\alpha(A) = \frac{1}{2}\alpha(H) = \chi_X(H)$ i dowód jest zakończony. □

Wykażemy teraz zapowiadane twierdzenie typu Darbo–Sadowskiego dla przestrzeni hiperwypukłych, udowodnione przez Espínolę.

Twierdzenie 3.2.5. *Niech X będzie przestrzenią hiperwypukłą ograniczoną, μ miarą niezwartości Hausdorffa lub Kuratowskiego i niech odwzorowanie $T\colon X \to X$ będzie μ-zgęszczające i ciągłe. Wówczas T ma co najmniej jeden punkt stały w X.*

Dowód. Wybierzmy dowolny punkt $a \in X$ i zdefiniujmy

$$\Sigma := \{H \subseteq X : a \in H, H \text{ hiperwypukły}, T(H) \subseteq H\}.$$

Oczywiście $\Sigma \neq \emptyset$, ponieważ $X \in \Sigma$; na mocy wniosku 2.1.10 i lematu Kuratowskiego–Zorna istnieje w Σ element minimalny $\widetilde{H}$. Niech $C \in \mathcal{H}_{\widetilde{H}}(T(\widetilde{H}) \cup \{a\})$; oczywiście $a \in C \subseteq X$, zbiór C jest hiperwypukły oraz $T(C) \subseteq C$ i stąd $C \in \Sigma$; ale $C \subseteq \widetilde{H}$ i wobec minimalności $\widetilde{H}$ w Σ otrzymujemy $C = \widetilde{H}$. Mamy teraz

$$\mu(\widetilde{H}) = \mu(C) = \mu\Big(\varepsilon\big(T(\widetilde{H}) \cup \{a\}\big)\Big) = \mu(T(\widetilde{H}) \cup \{a\}) = \mu(T(\widetilde{H})).$$

Ponieważ T jest μ-zgęszczające, wnosimy, że $\mu(\widetilde{H}) = 0$, czyli $\widetilde{H}$ jest zwarty (jako zbiór prezwarty i zupełny). Z twierdzenia 3.2.1 wnioskujemy o istnieniu punktu stałego odwzorowania $T|_{\widetilde{H}}\colon \widetilde{H} \to \widetilde{H}$, co kończy dowód. □

Na koniec tego paragrafu i rozdziału udowodnimy pewne uogólnienie twierdzenia 3.2.5.

Twierdzenie 3.2.6. *Niech X będzie przestrzenią hiperwypukłą, zaś $a \in X$ pewnym jej punktem. Załóżmy, że $T\colon X \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym oraz że każdy taki podzbiór $V \subseteq X$, że $T(V) \cup \{a\} = V$ lub $V \in \mathcal{H}_X(T(V))$, jest warunkowo zwarty w X. Wówczas T ma punkt stały.*

Dowód. Pokażemy wpierw istnienie takiego niepustego podzbioru $Z \subseteq X$, że $Z \subseteq T(Z)$. Niech $A := \{a, T(a), T^2(a), \dots\}$. Jeśli A jest zbiorem skończonym, to dla pewnych $n, k \geqslant 0$ mamy $T^n(a) = T^{n+k}(a)$ i wówczas wystarczy przyjąć $Z := \{T^n(a), T^{n+1}(a), \dots, T^{n+k}(a)\}$. W przeciwnym przypadku zdefiniujmy Z jako zbiór punktów skupienia zbioru A; oczywiście $A = T(A) \cup \{a\}$, więc A jest warunkowo zwarty w X i stąd $Z \neq \emptyset$. Obierzmy teraz dowolne $y \in Z$. Istnieje różnowartościowy ciąg $\langle y_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ w $A \setminus \{y, a\}$ zbieżny do y. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje więc takie $x_n \in A$, że $y_n = T(x_n)$. Z warunkowej zwartości A w X wnioskujemy, że z ciągu $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ można wyrwać podciąg $\langle x_{n_k} \rangle_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego $x \in X$. Założyliśmy, że $\langle y_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ jest różnowartościowy, więc to samo dotyczy ciągu $\langle x_{n_k} \rangle_{k=1}^{\infty}$; w szczególności x nie występuje w $\langle x_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$ nieskończenie wiele razy i stąd $x \in Z$. W konsekwencji $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = T(x)$ i $y \in T(Z)$, co wobec dowolności $y \in Z$ kończy dowód inkluzji $Z \subseteq T(Z)$.

Oznaczmy teraz

$$\Sigma := \{H \subseteq X : Z \subseteq H, H \text{ hiperwypukły}, T(H) \subseteq H\}.$$

Oczywiście $X \subseteq \Sigma$, więc rodzina Σ jest niepusta. Z wniosku 2.1.10 i lematu Kuratowskiego–Zorna wynika istnienie elementu minimalnego $\widetilde{H}$ w Σ. Niech teraz $C \subseteq \mathcal{H}_{\widetilde{H}}(T(\widetilde{H}))$. Oczywiście $Z \subseteq T(Z) \subseteq T(\widetilde{H}) \subseteq C$, zbiór C jest hiperwypukły oraz $T(C) \subseteq T(\widetilde{H}) \subseteq C$, zatem $C \in \Sigma$; ale $C \subseteq \widetilde{H}$ i $\widetilde{H}$ jest minimalny w Σ, więc $C = \widetilde{H}$. Stąd $\widetilde{H} \in \mathcal{H}_{\widetilde{H}}(T(\widetilde{H})) \subseteq \mathcal{H}_X(T(\widetilde{H}))$ i na mocy założenia zbiór $\widetilde{H}$ jest warunkowo zwarty, a więc zwarty (ponieważ hiperwypukłe podzbiory dowolnej przestrzeni metrycznej są zawsze domknięte jako podprzestrzenie zupełne). Stosując wniosek 3.2.2 do odwzorowania $T|_{\widetilde{H}}\colon \widetilde{H} \to \widetilde{H}$ otrzymujemy tezę. □

Uwagi 3.2.4. Nietrudno wykazać, że każde odwzorowanie μ-zgęszczające przestrzeni hiperwypukłej w siebie, gdzie μ jest miarą niezwartości Hausdorffa lub Kuratowskiego, spełnia założenia twierdzenia 3.2.6. Niech bowiem $T\colon X \to X$ będzie takim odwzorowaniem i niech $T(V) \cup \{a\} = V$ dla pewnego punktu $a \in X$ oraz podzbioru $V \subseteq X$; gdyby $\mu(V) > 0$, byłoby $\mu(V) = \mu(T(V) \cup \{a\}) = \mu(T(V)) < \mu(V)$ – sprzeczność. Niech z kolei $V \in \mathcal{H}_X(T(V))$; wówczas również nie może być $\mu(V) > 0$, ponieważ wtedy $\mu(V) = \mu(T(V))$ na mocy punktu (4) lematu 3.2.4. W każdym przypadku okazuje się więc, że V jest prezwarty, a zatem warunkowo zwarty w przestrzeni zupełnej X. Twierdzenie 3.2.6 jest zatem uogólnieniem twierdzenia 3.2.5. Zauważmy też, że w twierdzeniu 3.2.6 nie zakładamy ograniczoności przestrzeni X.

Uwagi

Twierdzenie 3.1.1 oraz wniosek 3.1.2 pochodzą z pracy [2]. Zauważmy, że analogiczne własności są prawdziwe w przestrzeniach Hilberta: zbiór punktów stałych nierozszerzającego odwzorowania niepustego, domkniętego, ograniczonego i wypukłego podzbioru takiej przestrzeni jest niepusty i wypukły (zob. np. [8]); warto odnotować, że w przypadku hiperwypukłym mamy do czynienia z zupełnie innymi metodami dowodowymi. Dowód twierdzenia 3.1.3 podaję za [10]. Twierdzenie 3.1.4 pochodzi z książki [8]. Twierdzenie 3.1.5 jest wykazane (przy odrobinę mocniejszych założeniach) w pracy [5]; zakłada się tam m.in., że dla $\alpha \in [0, 1]$, $x \in K$ jest zawsze $\alpha x \in K$. Sposób ominięcia tego założenia, pochodzący od Espínoli, zakomunikował mi D. Bugajewski.

Twierdzenie 3.2.1 jest trywialnym uogólnieniem lematu 3 z pracy [9], który w niniejszej pracy jest zacytowany jako wniosek 3.2.2. Definicja i własności miar niezwartości Hausdorffa i Kuratowskiego są omówione np. w [6], zaś ich związki z hiperwypukłością np. w [10]. Dowodząc punktu (3) lematu 3.2.3 wzorowałem się na [10]; w oszacowaniu tam podanym po lewej stronie nierówności występuje miara niezwartości przestrzeni nieco większej, ale po prawej stronie jest miara niezwartości względem przestrzeni X; dowód zamieszczony tutaj poprawia zatem pewien szczególny przypadek nierówności z [10]. Twierdzenie 3.2.5 jest udowodnione w pracy [9], zaś twierdzenie 3.2.6 i uwaga 3.2.4 pochodzą z [6].

Rozdział 4

Zastosowania do teorii równań całkowych

Na koniec pracy pokażemy przykładowe zastosowanie twierdzenia Baillona 3.1.1 do teorii nieliniowych równań całkowych. W paragrafie 4.1 zajmiemy się równaniem typu Fredholma, zaś w paragrafie następnym – równaniem typu Volterry. Metoda dowodu polegać będzie na określeniu pewnego związanego z danym równaniem nierozszerzającego odwzorowania pewnego ograniczonego i hiperwypukłego podzbioru przestrzeni $L^\infty[a,b]$ w siebie i pokazaniu, że punkt stały tego odwzorowania jest szukanym rozwiązaniem danego równania.

4.1. Równanie nieliniowe Fredholma

Twierdzenie 4.1.1. *Rozważmy równanie*

$$x(t) = g(t) + \int_a^b F(t,s,x(s))ds, \tag{$*$}$$

w którym $g \in \mathcal{C}[a,b]$, odwzorowanie $F\colon [a,b]\times[a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, niemalejące ze względu na trzecią zmienną oraz spełnia nierówność

$$|F(t,s,x) - F(t,s,y)| \leqslant L(t,s)|x-y|$$

dla wszystkich $t,s \in [a,b]$, $x,y \in \mathbb{R}$ i pewnej funkcji mierzalnej $L\colon [a,b]\times[a,b] \to [0,+\infty)$. Załóżmy, że $\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b L(t,s)ds \leqslant 1$ oraz że dla dowolnej funkcji $\eta \in L^\infty[a,b]$ funkcja $\int_a^b F(\cdot,s,\eta(s))ds$ jest ciągła na $[a,b]$. Załóżmy ponadto, że istnieją funkcje $v_0, v^0 \in \mathcal{C}[a,b]$ spełniające zależności

$$v_0(t) \leqslant g(t) + \int_a^b F(t,s,v_0(s))ds, \tag{$\dagger$}$$

$$v^0(t) \geqslant g(t) + \int_a^b F(t,s,v^0(s))ds \tag{$\ddagger$}$$

oraz nierówność $v_0 \leqslant v^0$. Wówczas równanie $(*)$ ma przynajmniej jedno ciągłe rozwiązanie ξ spełniające nierówność $v_0 \leqslant \xi \leqslant v^0$.

Dowód. Niech $X := \{x \in L^\infty[a,b] : v_0 \leqslant x \leqslant v^0\}$. Określmy odwzorowanie $T\colon X \to X$ wzorem $T(x)(t) := g(t) + \int_a^b F(t,s,x(s))ds$. Oczywiście dla dowolnego $x \in X$ funkcja $T(x)$ jest ciągła, co wynika z założeń o g i F. Ponieważ $F(t,s,\cdot)$ jest niemalejąca, więc dla $x,y \in X$ spełniających $x \leqslant y$ mamy $T(x) \leqslant T(y)$; z założeń $(\dagger)$ i $(\ddagger)$ widać, że $v_0 \leqslant T(v_0) \leqslant T(v^0) \leqslant v^0$, więc odwzorowanie T jest dobrze określone. Zauważmy, że wobec tego punkt stały T jest rozwiązaniem równania $(*)$. Z przykładu 2.2.2 wiadomo, że X jest hiperwypukła. Pokażemy teraz, że T jest nierozszerzający. Wybierzmy $x, y \in X$. Mamy:

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(y)\|_\infty &= \inf_{\lambda(E)=0} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} \left| \int_a^b \Big(F(t,s,x(s)) - F\big(t,y,y(s)\big)\Big) ds \right| \leqslant \\ &\leqslant \inf_{\lambda(E)=0} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} \int_a^b L(t,s)|x(s) - y(s)| ds \leqslant \\ &\leqslant \left(\inf_{\lambda(E)=0} \sup_{t\in[a,b]\setminus E} \int_a^b L(t,s) ds \right) \|x - y\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant \left(\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b L(t,s) ds \right) \|x - y\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant \|x - y\|_\infty.\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia 3.1.1 wnosimy, że T ma punkt stały $\xi \in X$, co kończy dowód. $\square$

W szczególnym przypadku, gdy jądro równania $(*)$ z twierdzenia 4.1.1 jest postaci $F(t,s,x) := K(t,s)f(x)$, otrzymujemy następujący rezultat.

Wniosek 4.1.2. *Niech $K\colon [a,b]\times[a,b] \to [0,+\infty)$ będzie ciągłą funkcją nieujemną, $g \in \mathcal{C}[a,b]$ oraz niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $\lambda \leqslant \big((b-a)\|K\|_\infty\big)^{-1}$, gdzie $\|K\|_\infty := \sup_{t,s\in[a,b]} K(t,s)$. Załóżmy także, że dla dowolnej funkcji $\eta \in L^\infty[a,b]$ całka $\int_a^b K(t,s)f\big(\eta(s)\big)ds$ jest ciągłą funkcją parametru $t \in [a,b]$, oraz że istnieją takie funkcje $v_0, v^0 \in \mathcal{C}[a,b]$, że*

$$\begin{aligned}v_0(t) &\leqslant g(t) + \int_a^b K(t,s)f\big(v_0(s)\big)ds,\\ v^0(t) &\geqslant g(t) + \int_a^b K(t,s)f\big(v^0(s)\big)ds,\end{aligned}$$

przy czym $v_0 \leqslant v^0$. Wówczas równanie całkowe

$$x(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)f\big(x(s)\big)ds$$

ma takie rozwiązanie ciągłe ξ, że $v_0 \leqslant \xi \leqslant v^0$.

Dowód. Kładąc $F(t,s,x) := K(t,s)f(x)$, mamy $|F(t,s,x) - F(t,s,y)| = K(t,s)|f(x) - f(y)| \leqslant \|K\|_\infty \lambda |x-y| \leqslant \frac{1}{b-a}|x-y|$ i możemy zastosować twierdzenie 4.1.1. $\square$

4.2. Równanie nieliniowe Volterry

Rozumując analogicznie jak w poprzednim paragrafie, możemy wykazać następujące twierdzenie oraz wniosek o istnieniu rozwiązania równania typu Volterry.

Twierdzenie 4.2.1. *Załóżmy, że* $g \in \mathcal{C}[a,b]$, *funkcja* $F\colon \{\langle t,s,x\rangle \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\} \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, niemalejąca ze względu na trzecią zmienną i spełnia warunek* $|F(t,s,x) - F(t,s,y)| \leqslant L(t,s)|x-y|$ *dla* $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$, *gdzie* $L\colon \{\langle t,s,x\rangle \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\} \to [0,+\infty)$ *jest taką funkcją mierzalną, że* $\sup_{t\in[a,b]} \int_a^t L(t,s)ds \leqslant 1$. *Załóżmy także, że funkcja* $t \mapsto \int_a^t F(t,s,\eta(s))ds$ *jest ciągła na* $[a,b]$ *dla dowolnej funkcji* $\eta \in L^\infty[a,b]$ *i że istnieją takie funkcje* $v_0, v^0 \in \mathcal{C}[a,b]$, *że* $v_0 \leqslant v^0$ *oraz*

$$v_0(t) \leqslant g(t) + \int_a^t F(t,s,v_0(s))ds,$$
$$v^0(t) \geqslant g(t) + \int_a^t F(t,s,v^0(s))ds.$$

Wówczas równanie

$$x(t) = g(t) + \int_a^t F(t,s,x(s))ds, \qquad (*)$$

ma ciągłe rozwiązanie ξ *spełniające nierówność* $v_0 \leqslant \xi \leqslant v^0$.

Wniosek 4.2.2. *Niech* $K\colon \{\langle t,s\rangle \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant s \leqslant t \leqslant b\} \to [0,+\infty)$ *będzie ciągła,* $g \in \mathcal{C}[a,b]$ *oraz niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $\lambda \leqslant \big((b-a)\|K\|_\infty\big)^{-1}$, *gdzie* $\|K\|_\infty := \sup_{a\leqslant s\leqslant t\leqslant b} K(t,s)$. *Załóżmy, że* $\int_a^t K(t,s)f(\eta(s))ds$ *jest ciągłą funkcją parametru* $t \in [a,b]$ *dla dowolnej funkcji* $\eta \in L^\infty[a,b]$ *oraz że istnieją takie funkcje* $v_0, v^0 \in \mathcal{C}[a,b]$, *że*

$$v_0(t) \leqslant g(t) + \int_a^t K(t,s)f(v_0(s))ds,$$
$$v^0(t) \geqslant g(t) + \int_a^t K(t,s)f(v^0(s))ds,$$

oraz $v_0 \leqslant v^0$. *Wówczas równanie*

$$x(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s)f(x(s))ds$$

ma takie rozwiązanie ciągłe ξ, *że zachodzą nierówności* $v_0 \leqslant \xi \leqslant v^0$.

Uwagi

Twierdzenie 4.1.1 wraz z dowodem cytuję za [16].

Bibliografia

[1] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J. Math **6** (1956), 405–439.

[2] J.-B. Baillon, *Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces*, Contemp. Math. **72** (1988), 11–19.

[3] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach spaces*, Instytut Matematyki PAN, 1979. preprint nr 7, seria B.

[4] M. Borkowski, D. Bugajewski, and H. Przybycień, *Hyperconvex spaces revisited*, Bull. Austr. Math. Soc. **68** (2003), 191–203.

[5] D. Bugajewski, *Fixed-point theorems in hyperconvex spaces revisited*, Nonlinear Operator Theory (special issue of Mathematical and Computer Modelling, edited by R. P. Agarwal and D. O'Regan) **32** (2000), no. 11–13, 1457–1461.

[6] D. Bugajewski and E. Grzelaczyk, *A fixed point theorem in hyperconvex spaces*, Arch. Math. **75** (2000), 395–400.

[7] W. J. Davis, *A characterization of $\mathcal{P}_1$ spaces*, Journal of Approx. Theory **21** (1977), 315–318.

[8] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed point theory*, Vol. I, PWN, 1982.

[9] R. Espínola, *Darbo–Sadovski's theorem in hyperconvex metric spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **40** (1996), 129–137.

[10] R. Espínola and M. A. Khamsi, *Introduction to hyperconvex spaces*, in: Handbook on metric fixed point theory, Edited by W. A. Kirk and B. Sims, Kluwer Academic Publishers.

[11] I. Galiņa, *On strict convexity*, LU Zinātniskie Raksti, Matemātika **576** (1992), 193–198.

[12] F. Hausdorff, *Erweiterung einer Homöomorphie*, Fund. Math. **16** (1930), 353–360.

[13] J. R. Isbell, *Six theorems about injective metric spaces*, Comment. Math. Helvetic **39** (1964), 65–76.

[14] H. E. Lacey, *The isometric theory of classical Banach spaces*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.

[15] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, 1989.

[16] J. J. Nieto and H.-K. Xu, *Solvability of nonlinear Volterra and Fredholm equations in weighted spaces*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 8, 1289–1297.

[17] R. C. Sine, *On linear contraction semigroups in sup norm spaces*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 885–890.

[18] P. Soardi, *Existence of fixed points for nonexpansive mappings in certain Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), 25–29.