

## ROZDZIAŁ 10

# CAŁKI OZNACZONE

### TEORIA

- $P = \int_a^b |f(x)| dx$  — pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji  $y = f(x)$ , osią  $OX$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$
- $P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$  — pole obszaru ograniczonego z góry wykresem funkcji  $y = f(x)$ , z dołu – wykresem funkcji  $y = g(x)$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$ ,
- $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  — objętość bryły powstałej z obrotu dookoła osi  $OX$  trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresem funkcji  $y = f(x)$ , osią  $OX$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$ ,
- $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  — pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu dookoła osi  $OX$  trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresem funkcji  $y = f(x)$ , osią  $OX$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$ ,
- $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  — długość krzywej  $y = f(x)$  dla  $x \in [a, b]$ ,
- $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$  — długość krzywej  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  dla  $t \in [a, b]$ .

**UWAGA.** W powyższych wzorach dla prostoty pominięto założenia dotyczące regularności rozważanych funkcji. Szczegółowe założenia omówione zostaną podczas wykładu.

### ZADANIA

**Zadanie 10.1.** Oblicz poniższe całki oznaczone:

(a)  $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$ ;

(b)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ;

(c)  $\int_0^1 xe^x dx$ .

**Zadanie 10.2.** Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

(a)  $y = x^2 - 2x, y = 0, x = -1, x = 1;$

(d)  $y = x^2, 2x - y + 3 = 0;$

(b)  $y = x^2, y = \sqrt{x};$

(e)  $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14.$

(c)  $y = x^3, y = 4x;$

**Zadanie 10.3.** Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi  $OX$  figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

(a)  $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 0, x = 3;$

(c)  $y = x^2 - 4x + 4, y = |x - 2|;$

(b)  $y = 2x - x^2, y = x;$

(d)  $x^2 + y^2 = r^2$ , gdzie  $r > 0$ .

**Zadanie 10.4.** Oblicz pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi  $OX$  figury ograniczonej wykresem funkcji  $y$  oraz osią  $OX$  na podanym przedziale:

(a)  $y = 2\sqrt{x}$  dla  $x \in [0, 3];$

(c)  $y = \sqrt{1 + 2x}$  dla  $x \in [3, 8];$

(b)  $y = \frac{1}{3}x^3$  dla  $x \in [0, 1];$

(d)  $y = \sqrt{1 - x^2}$  dla  $x \in [-1, 1].$

**Zadanie 10.5.** Oblicz długość krzywych zadanych równaniami:

(a)  $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$  dla  $t \in [0, 1];$

(c)  $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$  dla  $x \in [1, 4];$

(b)  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$  dla  $t \in [0, 2\pi];$

(d)  $x^2 + y^2 = 1.$

**Zadanie 10.6.** Ciało porusza się po prostej, a jego prędkość w chwili  $t$  wynosi  $v(t) = 3t^2$ . Oblicz drogę przebytą przez to ciało w czasie od  $t = 1$  do  $t = 2$ .

**Zadanie 10.7.** Oblicz następujące całki niewłaściwe:

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$

(c)  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx;$

(e)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$

(b)  $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1 + 3x}};$

(d)  $\int_0^{+\infty} x \sin x dx;$

(f)  $\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$

**Zadanie 10.8.** Prawdopodobieństwo, że cząsteczka gazu o masie  $m$  i temperaturze  $T$  ma prędkość  $v$ , dane jest za pomocą rozkładu Maxwella o gęstości

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad v \geq 0,$$

gdzie  $k$  jest stałą Boltzmanna. Znaleźć prędkość średnią cząsteczki, wyrażoną wzorem

$$v_{\text{sr}} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv.$$

## ODPOWIEDZI

**Zadanie 10.1.** (a)  $\frac{1}{2}$ ; (b)  $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$ ; (c) 1.

**Zadanie 10.2.** (a) 2; (b)  $\frac{1}{3}$ ; (c) 8; (d)  $\frac{32}{3}$ ; (e)  $\frac{343}{3}$ .

**Zadanie 10.3.** (a)  $18\pi$ ; (b)  $\frac{1}{5}\pi$ ; (c)  $\frac{4}{15}\pi$ ; (d)  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

**Zadanie 10.4.** (a)  $\frac{56}{3}\pi$ ; (b)  $\frac{1}{9}\pi(2\sqrt{2} - 1)$ ; (c)  $\frac{76\sqrt{2}}{3}\pi$ ; (d)  $4\pi$ .

**Zadanie 10.5.** (a)  $\frac{4}{3}$ ; (b) 8; (c) 45; (d)  $2\pi$ .

**Zadanie 10.6.**  $s = 7$  m.

**Zadanie 10.7.** (a)  $\frac{1}{3}$ ; (b)  $\frac{2}{3}$ ; (c)  $\frac{1}{2}$ ; (d) nie istnieje; (e)  $\frac{1}{2}$ ; (f) nie istnieje.

**Zadanie 10.8.**  $v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}$ .