

ROZDZIAŁ 6

CIĄGI

ZADANIA

Zadanie 6.1. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym:

(a) $-\frac{2}{5n}$; (b) $\frac{n^n}{n!}$; (c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Zadanie 6.2. Obliczyć granice następujących ciągów:

(a) $\frac{1}{5} - \frac{5}{n}$; (c) $\frac{8 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{5}{n}}$;
(b) $\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n}\right)$; (d) 3^n .

Zadanie 6.3. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 + 4n - 1}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 7n} - n\right)$;
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 7n + 2}{2n^3 - 3n + 5}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 7}{3^{n+1} - 1}$;
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{2n^3 - n + 2}$; (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)! - (n+2)!}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

Zadanie 6.4. Oblicz następujące granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-3)^n}{4^n}$;
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \cdot 7^n + 9 \left(\frac{1}{3}\right)^n}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n \sin(7n^3 - 1) + 5}{3n^2 - 1}$;
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 + n^3}$; (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4}$;

Zadanie 6.5. Obliczyć granice następujących ciągów:

(a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n+1}$;

(e) $\left(\frac{1-n^2}{5-n^2}\right)^{2n^2}$;

(b) $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$;

(f) $\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1}$;

(c) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{5n}$;

(g) $\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{n+2}$;

(d) $\left(\frac{3n-5}{3n+7}\right)^{2n+5}$;

(h) $\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^{5n}$.

Zadanie 6.6. Wykazać, że żaden z ciągów nie ma granicy:

(a) $(-1)^n$;

(b) $\frac{1+(-1)^n}{2-(-1)^n}$;

(c) $\sin \frac{n\pi}{2}$;

(d) $\cos \frac{n\pi}{2}$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 6.1. (a) rosnący, ograniczony z dołu i z góry; (b) rosnący, ograniczony z dołu; (c) malejący, ograniczony z dołu i z góry.

Zadanie 6.2. (a) $\frac{1}{5}$; (b) 6; (c) 4; (d) $+\infty$.

Zadanie 6.3. (a) 0; (b) 2; (c) $+\infty$; (d) 0; (e) 0; (f) $\frac{1}{3}$; (g) 0.

Zadanie 6.4. (a) 5; (b) 7; (c) 1; (d) 0; (e) 0; (f) $\frac{2}{3}$; (g) 1.

Zadanie 6.5. (a) e^{-2} ; (b) $e^{\frac{1}{2}}$; (c) e^{-15} ; (d) e^{-8} ; (e) e^8 ; (f) e^3 ; (g) $+\infty$; (h) 0.