Rozdział 5

Elementy algebry liniowej

Zadania

Zadanie 5.1. Oblicz: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $2\mathbf{B}-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ oraz $\mathbf{B}^T$, jeżeli:

(a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

Zadanie 5.2. Oblicz wartość następujących wyznaczników:

(a) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix}12 & 8 & -4\\ 6 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 8\end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & -4 & 1 & 2\\ 9 & 0 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

Zadanie 5.3. Wyznacz macierz odwrotną (o ile to możliwe) do macierzy:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.4. Rozwiąż równanie macierzowe:

(a) $\mathbf{A} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.5. Korzystając ze wzorów Cramera, rozwiąż następujące układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ -3x + 4y = 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x - y + z + 4w = 0 \\ x + 2z + 2w = 1 \\ 2y - 2z - 2w = -2 \\ x + z + 2w = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

Zadanie 5.6. Dla jakiej wartości parametru a układ

$$\begin{cases} x + y - az = 2a \\ -2x + y + z = 1 \\ x - y - 2az = -3a. \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Znaleźć to rozwiązanie.

Zadanie 5.7. Rozwiąż, w zależności od parametru a następujący układ równań:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

Zadanie 5.8. Korzystając z metody Gaussa–Jordana, rozwiąż następujące układy równań liniowych:

(a) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \\ x - 7y = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 4z = 4 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 7y + z = 0 \\ 3x + 6y + 7z = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} -3x + y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ -3x + y + 2z = 1. \end{cases}$

Zadanie 5.9. Znaleźć wektory i wartości własne (nad ciałem $\mathbb{C}$) odwzorowań reprezentowanych przez macierze:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.10. Oblicz iloczyn skalarny oraz wektorowy wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$, jeżeli

(a) $\vec{a} = [2, 1, 3]$ oraz $\vec{b} = [-1, -1, 1]$;

(b) $\vec{a} = [1, 2, -1]$ oraz $\vec{b} = [3, -1, 0]$;

(c) $\vec{a} = [4, 0, 1]$ oraz $\vec{b} = [-1, -3, 2]$;

(d) $\vec{a} = [2, -2, 4]$ oraz $\vec{b} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1]$.

Odpowiedzi

Zadanie 5.1. (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $2\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ - nie można wykonać, $2\mathbf{B} - \mathbf{A}$ - nie można wykonać, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ - nie można wykonać, $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ - nie można wykonać, $2\mathbf{B} - \mathbf{A}$ - nie można wykonać, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ -nie można wykonać, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $2\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 19 & 14 & 4 \\ 11 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 11 & 5 & 10 \\ 10 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.2. (a) 26; (b) -13; (c) -10; (d) 1; (e) 0; (f) 0; (g) -246.

Zadanie 5.3. (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\mathbf{C}^{-1}$ nie istnieje; (d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; (e) $\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $\mathbf{F}^{-1}$ nie istnieje.

Zadanie 5.4. (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\mathbf{C} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.5. (a) $x = 3$, $y = 5$; (b) $x = 6$, $y = 6$; (c) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$; (d) $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $w = -1$; (e) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$.

Zadanie 5.6. Dla $a \neq \frac{2}{7}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x(a) = a$, $y(a) = 2a$, $z(a) = 1$.

Zadanie 5.7. Dla $a \neq 1$ oraz $a \neq -1$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x(a) = \frac{1}{a+1}$, $y(a) = \frac{1}{a+1}$. Dla $a = 1$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $a = -1$ układ nie ma rozwiązań.

Zadanie 5.8. (a) $x = 1$, $y = -1$; (b) brak rozwiązań; (c) $x = 1 + s - t$, $y = s$, $z = t$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$; (d) $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$; (e) $x = 2 + t$, $y = 2 + 3t$, $z = t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (f) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; (g) $x = 7t$, $y = t$, $z = 5t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (h) brak rozwiązań.

Zadanie 5.9. (a) wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_1 = -1$ są postaci $[-a, a]^T$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_2 = 5$ są postaci $[2a, a]^T$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; (b) wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_1 = 1 - i$ są postaci $[a, -ai]^T$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a wektory własne odpowiadające wartości własnej $\lambda_2 = 1 + i$ są postaci $[a, ai]^T$, gdzie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Zadanie 5.10. (a) $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, $\vec{a} \times \vec{b} = [4, -5, -1]$; (b) $\vec{a} \circ \vec{b} = 1$, $\vec{a} \times \vec{b} = [-1, -3, -7]$; (c) $\vec{a} \circ \vec{b} = -2$, $\vec{a} \times \vec{b} = [3, -9, -12]$; (d) $\vec{a} \circ \vec{b} = -6$, $\vec{a} \times \vec{b} = [0, 0, 0]$.