# Rozdział 1

# Elementy rachunku zdań i rachunku zbiorów

## Teoria

Wartości logiczne. Sens spójników dwuargumentowych określa następująca tabelka:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

W przypadku spójnika negacji mamy

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

## Zadania

**Zadanie 1.1.** Ocen wartość logiczną następujących zdań:

(a) Liczba 4 jest parzysta i liczba 5 jest nieparzysta.

(b) Liczba 20 jest parzysta lub liczba 4 jest nieparzysta.

(c) Jeżeli 4 jest liczbą nieparzystą, to $20 : 4 = 5$.

(d) Jeżeli $\log_3 3 = 1$, to $3^{-1} = 3$.

(e) Liczba 4 jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $4 > 10$.

**Zadanie 1.2.** Sprawdź, czy następujące formuły są tautologiami:

(a) $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$;

(b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$;

(c) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

(d) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)$;

(e) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.

**Zadanie 1.3.** Zaneguj następujące zdania:

(a) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} |x| > 0$;

(b) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^2 + 5 = 0$;

(c) $\bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \bigvee_{x\in\mathbb{R}} x < y$;

(d) $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geqslant n \Rightarrow a_n = 0)$.

**Zadanie 1.4.** Używając kwantyfikatorów oraz symboli matematycznych zapisz poniższe zdania:

(a) Liczba całkowita $x$ jest parzysta.

(b) Liczba naturalna $x$ jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

(c) Nie istnieje największa liczba naturalna.

(d) Nie istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest mniejszy od zera.

**Zadanie 1.5.** Niech $A = [3, 5)$ oraz $B = (4, 10]$ będą podzbiorami $X = [0, +\infty)$. Wyznaczyć:

(a) $A \setminus B$;

(b) $A' \cap B$;

(c) $(A \cup B)' \cap B$;

(d) $(A \cap B)' \cup A$.

**Zadanie 1.6.** Niech $A = (-1, 3)$, $B = [-10, -1)$, $C = [-5, 0)$ będą podzbiorami $X = \mathbb{R}$. Wyznaczyć:

(a) $(A \cup B) \setminus C$;

(b) $(A \cup B) \cap C$;

(c) $(A' \cap B) \cup C$;

(d) $A' \cap B' \cap C$.

**Zadanie 1.7.** Dowieść, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ prawdziwe są następujące zależności:

(a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

**Zadanie 1.8.** Na przykładzie zbiorów $A = [-2, 1)$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x - 1 < 1\}$ sprawdzić słuszność praw de Morgana. (Zakładamy, że $A$ i $B$ są podzbiorami $\mathbb{R}$.)

## Odpowiedzi

**Zadanie 1.1.** (a) prawda; (b) prawda; (c) prawda; (d) fałsz; (e) fałsz.

**Zadanie 1.2.** (a) tak; (b) nie; (c) tak; (d) nie; (e) tak.

**Zadanie 1.3.** (a) $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} |x| \leqslant 0$; (b) $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2+5 \neq 0$; (c) $\bigvee_{y\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x \geqslant y$; (d) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}} (k \geqslant n \wedge a_n \neq 0)$.

**Zadanie 1.4.** (a) $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} x = 2k$; (b) $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} x = k^2+n^2$; (c) $\neg \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k\in\mathbb{N}} n \geqslant k$ albo $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{k\in\mathbb{N}} n < k$; (d) $\neg \bigvee_{x\in\mathbb{R}} x^2 < 0$ albo $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x^2 \geqslant 0$.

**Zadanie 1.5.** (a) $[3,4]$; (b) $[5,10]$; (c) $\emptyset$; (d) $[0,+\infty)$.

**Zadanie 1.6.** (a) $[-10,-5)\cup[0,3)$; (b) $[-5,0)\setminus\{-1\}$; (c) $[-10,0)$; (d) $\{-1\}$.