Rozdział 4

Funkcje

Zadania

Zadanie 4.1. Wyznacz dziedzinę naturalną[1] następujących funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2^{\frac{x}{x-2}} - 1}$;

(b) $f(x) = \sqrt{x - x^3}$;

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$;

(d) $f(x) = \log_{x^2-3}(x^2 + 2x + 3)$.

Zadanie 4.2. Wyznacz dziedzinę naturalną oraz zbiór wartości następujących funkcji:

(a) $f(x) = 3 - 2|\cos(4x)|$;

(b) $f(x) = 1 + |\log_2 x|$;

(c) $f(x) = 1 + \sqrt{\log(x^2 - 3)}$;

(d) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1}$.

Zadanie 4.3. Znaleźć obraz i przeciwobraz zbiorów $A = [1, 4]$, $B = (-1, 1]$ oraz $C = [-2, -1) \cup [0, 4)$ poprzez funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdy:

(a) $f(x) = x + 2$;

(b) $f(x) = x^2$.

Zadanie 4.4. Która z poniżej określonych funkcji odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, jeżeli

(a) $f(x) = |x^2 + 2x + 5|$ oraz $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \log(x^2 + 1)$ oraz $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty)$;

(c) $f(x) = 2^{x+1} + \sin x$ oraz $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, +\infty)$?

Zadanie 4.5. Zbadać różnowartościowość następnych funkcji:

(a) $f(x) = 3^x + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

(c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

[1] Dziedziną naturalną funkcji f nazywamy zbiór tych wszystkich x, dla których istnieje wartość $f(x)$.

Zadanie 4.6. Wyznacz, o ile istniej, wzór funkcji odwrotnej do funkcji f, jeżeli:

(a) $f(x) = 3x + 5$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = x^2 + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = 3^{2x-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{5x-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{5}\}$.

Zadanie 4.7. Prawo Kohlrauscha opisujące przewodność molową Λ_m rozcieńczonego roztworu mocnego elektrolitu o stężeniu c ma postać $\Lambda_m = \Lambda_m^0 - \mathcal{K}\sqrt{c}$, gdzie Λ_m^0 jest przewodnością molową dla nieskończonego rozcieńczenia, a $\mathcal{K}$ – pewną stałą. Wyrazić c jako jawną funkcję Λ_m.

Zadanie 4.8. Izoterma adsorbcji Langmuira

$$\theta = \frac{Kp}{1 + Kp}$$

opisuje ułamek powierzchni θ pokryty przez cząsteczki zaadsorbowanego gazu o ciśnieniu p (K jest pewną stałą). Znaleźć jawną postać wyrażenia na p jako funkcji θ.

Zadanie 4.9. Ciśnienie gazu na wysokości h powyżej poziomu morza można obliczyć za pomocą równania barometrycznego $p = p_0 e^{-Mgh/RT}$, gdzie M jest masą molową gazu, a p_0 – ciśnieniem na poziomie morza. Wyrazić h za pomocą pozostałych zmiennych.

Zadanie 4.10. W wyniku złożenia jakich funkcji powstała funkcja f, jeżeli

(a) $f(x) = \log \cos x$;

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

(c) $f(x) = 2^{\frac{1}{x+2}}$;

(d) $f(x) = \sqrt{\log_2(\mathrm{tg}(3x))}$?

Zadanie 4.11. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 3$ oraz $g(x) = \sqrt{x-1}$. Znaleźć wzór funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$.

Zadanie 4.12. Dane są funkcje $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1-x}$ oraz $h(x) = \sin x$. Znaleźć wzór funkcji $f \circ h \circ f$ oraz $h \circ g \circ f$.

Zadanie 4.13. Wśród poniższych funkcji wskazać te, które są parzyste i te które są nieparzyste:

(a) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 2$;

(b) $f(x) = x^3 - 5$;

(c) $f(x) = |2x| \cdot \dfrac{1}{x}$ dla $x \neq 0$;

(d) $f(x) = 3 + 2\cos^3 x$;

(e) $f(x) = \sin x + \cos x - 1$;

(f) $f(x) = x^3 + \sin^3 x$.

Zadanie 4.14. Naszkicować wykresy podanych funkcji:

(a) $f(x) = |x^2 - 1|$;

(b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3(x-1)}$;

(c) $f(x) = 1 + \sin(2x)$;

(d) $f(x) = \log(x+1) + 1$.

Odpowiedzi

Zadanie 4.1. (a) $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$; (b) $(-\infty,-1]\cup[0,1]$; (c) $(-3,1)$; (d) $[(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)]\setminus\{-2,2\}$.

Zadanie 4.2. (a) $D_f=\mathbb{R}$ oraz $W_f=[1,3]$; (b) $D_f=(0,+\infty)$ oraz $W_f=[1,+\infty)$; (c) $D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ oraz $W_f=[1,+\infty)$; (d) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ oraz $W_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Zadanie 4.3. (a) $f(A)=[3,6]$, $f(B)=(1,3]$, $f(C)=[0,1)\cup[2,6)$, $f^{-1}(A)=[-1,2]$, $f^{-1}(B)=(-3,-1]$, $f^{-1}(C)=[-4,-3)\cup[-2,2]$; (b) $f(A)=[1,16]$, $f(B)=[0,1]$, $f(C)=[0,16)$, $f^{-1}(A)=[-2,-1]\cup[1,2]$, $f^{-1}(B)=[-1,1]$, $f^{-1}(C)=[-2,2]$.

Zadanie 4.4. (a) nie; (b) tak; (c) nie.

Zadanie 4.5. (a) tak; (b) tak; (c) nie; (d) nie.

Zadanie 4.6. (a) $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}y-\frac{5}{3}$, $y\in\mathbb{R}$; (b) nie istnieje; (c) $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_3 y$, $y>0$; (d) $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{5y-1}$, $y\neq\frac{1}{5}$.

Zadanie 4.7. $c=\frac{1}{\mathcal{K}^2}(\Lambda_m^0-\Lambda_m)^2$.

Zadanie 4.8. $p=\frac{\theta}{K(1-\theta)}$.

Zadanie 4.9. $h=-\frac{RT}{Mg}\ln\frac{p}{p_0}$.

Zadanie 4.10. (a) $f(x)=(g\circ h)(x)$, gdzie $g(x)=\log x$, $h(x)=\cos x$; (b) $f(x)=(g\circ h)(x)$, gdzie $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=x^2+1$; (c) $f(x)=(g\circ h\circ i)(x)$, gdzie $g(x)=2^x$, $h(x)=\frac{1}{x}$, $i(x)=x+2$; (d) $f(x)=(g\circ h\circ i\circ j)(x)$, gdzie $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=\log_2 x$, $i(x)=\operatorname{tg} x$, $j(x)=3x$.

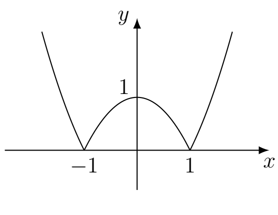
Zadanie 4.11. $(f\circ g)(x)=x+2$ oraz $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2+2}$.

Zadanie 4.12. $(f\circ h\circ f)(x)=(\sin x^2)^2$ oraz $(h\circ g\circ f)(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$.

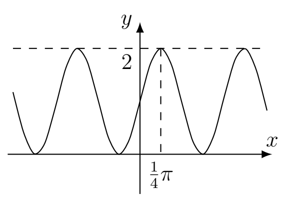
Zadanie 4.13. Parzyste: (a), (d). Nieparzyste: (c), (f).

Zadanie 4.14.

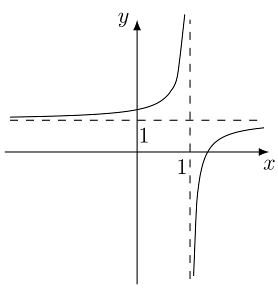
(a)



(c)



(b)



(d)