Rozdział 4

Funkcje

Definicja 4.1. Załóżmy, że dane są dwa zbiory A i B, których elementami mogą być dowolne obiekty. Przypuśćmy, że każdemu elementowi x ze zbioru A jest w pewien jednoznaczny sposób przyporządkowany element ze zbioru B, który będziemy oznaczali przez $f(x)$. Wtedy f nazywamy *funkcją* z A do B (lub *odwzorowaniem* A w B). Zbiór A nazywamy *zbiorem argumentów* lub *dziedziną* (będziemy mówili także, że f jest określone na A), a elementy $f(x)$ – *wartościami funkcji* f. Zbiór wszystkich wartości funkcji f nazywamy *obszarem wartości*.

Z reguły pojęcie „funkcja" odnosi się do przypadku, gdy B jest zbiorem liczb. W przypadku gdy $B = \mathbb{R}$, to mówimy o funkcji rzeczywistej.

Zapis $f\colon A \to B$ oznacza, że f jest funkcją określoną na zbiorze A o wartościach w zbiorze B. Często do oznaczenia funkcji f, zwłaszcza wtedy, gdy jest ona określona konkretnym wzorem, używać będziemy zapisu typu $x \mapsto f(x)$.

Definicja 4.2. Niech A i B będą dwoma zbiorami i niech f będzie odwzorowaniem A w B. Jeśli $E \subset A$, to $f(E)$ definiujemy jako zbiór wszystkich elementów $f(x)$ dla $x \in E$. Będziemy nazywali $f(E)$ *obrazem* zbioru E przy odwzorowaniu f. Przy tych oznaczeniach $f(A)$ jest zbiorem wartości funkcji f. Jeśli $f(A) = B$, to mówimy, że f odwzorowuje A na B.

Jeśli $E \subset B$, to $f^{-1}(E)$ oznacza zbiór wszystkich $x \in A$ takich, że $f(x) \in E$. Zbiór $f^{-1}(E)$ nazywać będziemy *przeciwobrazem* zbioru E przy odwzorowaniu f.

Jeśli $y \in B$, to $f^{-1}(y)$ jest zbiorem wszystkich $x \in A$ takich, że $f(x) = y$. Jeśli dla każdego $y \in B$ zbiór $f^{-1}(y)$ składa się z nie więcej niż jednego elementu zbioru A, to f nazywamy *wzajemnie jednoznacznym* (ozn. $1:1$) odwzorowaniem zbioru A w B. Wobec tego f jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru A w B, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja 4.3. Niech $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$. *Złożeniem* (*superpozycją*) odwzorowań f i g nazywamy odwzorowanie $h\colon A \to C$ określone wzorem $h(x) = g(f(x))$ dla $x \in A$ i oznaczamy je symbolem $g \circ f$.

Definicja 4.4. Dla każdego wzajemnie jednoznacznego odwzorowania $f\colon A \to B$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $g\colon B_0 \xrightarrow{\text{na}} A$, gdzie $B_0 = f(A)$ takie, że $g(f(x)) = x$ dla każdego $x \in A$. Odwzorowanie to nazywamy *odwzorowaniem odwrotnym* względem odwzorowania f i oznaczamy je symbolem f^{-1}.

Definicja 4.5. Jeżeli $f\colon A \to B$ oraz $X \subset A$, to odwzorowanie $g\colon X \to B$ określone wzorem $g(x) = f(x)$ dla $x \in X$ nazywamy *zawężeniem* (*obcięciem*) odwzorowania f do zbioru X i oznaczamy je symbolem f_X, a odwzorowanie f nazywamy wówczas *rozszerzeniem* odwzorowania g na zbiór A.

Definicja 4.6. *Wykresem* funkcji $f\colon A \to B$ nazywa się podzbiór $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ produktu $A \times B$. Podkreślmy, że funkcję często utożsamia się z jej wykresem.

Uwaga 4.1. Przy pomocy definicji odwzorowania wzajemnie jednoznacznego i „na" wprowadza się jedno z podstawowych pojęć teorii mnogości a mianowicie równoliczność zbiorów. Mówimy, że dwa zbiory są równoliczne (lub, że są tej samej mocy), jeśli istnieje odwzorowanie $f\colon A \xrightarrow[\text{na}]{1:1} B$.

Dowolne dwa przedziały są zbiorami równolicznymi oraz dowolny przedział jest równoliczny z całym zbiorem $\mathbb{R}$.

Uwaga 4.2. Ciąg oraz ciąg skończony, określone w Definicji 2.6, są oczywiście przykładami funkcji. Zbiór przeliczalny zdefiniowany w Definicji 2.7 można równoważnie określić jako zbiór równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$, natomiast zbiór skończony – jako równoliczny ze zbiorem postaci $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant k\}$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną.

Wprowadzimy teraz kilka ogólnych pojęć dotyczących funkcji o wartościach liczbowych.

Definicja 4.7 (działania arytmetyczne na funkcjach)**.** Jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest dowolnym zbiorem, to przez $f + g$, $f - g$, λf, fg, f/g oznaczamy funkcje rzeczywiste określone na zbiorze A wzorami

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A$$

i nazywamy je odpowiednio *sumą, różnicą, iloczynem funkcji przez liczbę, iloczynem funkcji* oraz ich *ilorazem* (w przypadku ilorazu zakładamy oczywiście, że $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in A$).

W powyższej definicji możemy oczywiście zastąpić zbiór $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$.

Definicja 4.8 (funkcje monotoniczne)**.** Funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, nazywamy:

- *rosnącą*, jeśli z warunku $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
- *ściśle rosnącą*, jeśli z warunku $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) < f(x_2)$;

- *malejącą*, jeśli z warunku $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
- *ściśle malejącą*, jeśli z warunku $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ wynika, że $f(x_1) > f(x_2)$.

W szczególności ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} \geqslant a_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz analogicznie w pozostałych przypadkach.

Funkcję f nazywamy *monotoniczną*, jeśli jest rosnąca lub malejąca, a *ściśle monotoniczną*, jeśli jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca.

Definicja 4.9 (funkcja parzysta i nieparzysta)**.** Funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, nazywamy *parzystą* (względnie *nieparzystą*), jeśli:

1^0 z warunku $x \in A$ wynika $-x \in A$;

2^0 $f(-x) = f(x)$ (względnie $f(-x) = -f(x)$) dla dowolnego $x \in A$.

Definicja 4.10 (funkcje okresowe)**.** Funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, nazywamy *okresową*, jeśli istnieje liczba $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ taka, że:

1^0 jeśli $x \in A$, to $x + T$ oraz $x - T \in A$;

2^0 $f(x + T) = f(x)$ dla każdego $x \in A$.

Wówczas każda taka liczba T nazywa się *okresem* funkcji f. Jeśli wśród wszystkich okresów dodatnich danej funkcji okresowej istnieje liczba najmniejsza, to nazywamy ją *okresem podstawowym* tej funkcji.

Definicja 4.11 (funkcje ograniczone i ich kresy)**.** Funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie A jest dowolnym zbiorem, nazywamy *ograniczoną z góry*, jeśli zbiór jej wartości $f(A)$ jest ograniczony z góry. Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona z góry na zbiorze* $X \subset A$, jeśli funkcja f_X jest ograniczona. Analogicznie definiuje się funkcje ograniczone z dołu i ograniczone.

Przez *kres górny* funkcji f rozumiemy kres górny zbioru jej wartości i oznaczamy go symbolami:

$$\sup_A f, \quad \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{lub} \quad \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Analogicznie określamy i oznaczamy kres dolny (inf) funkcji f.

Jeśli zbiór wartości funkcji f ma liczbę największą, to oznaczamy ją symbolami:

$$\max_A f, \quad \max_{x\in A} f(x) \quad \text{lub} \quad \max\{f(x) : x \in A\}$$

(analogicznie w przypadku liczby najmniejszej).