2.5. Geometryczna interpretacja zbioru liczb rzeczywistych

Ostatni paragraf niniejszego rozdziału rozpoczniemy od podania definicji modułu liczby rzeczywistej.

Definicja 2.14. *Modułem* (lub wartością bezwzględną) liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę rzeczywistą $|x|$, określoną następująco:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Ponadto przyjmujemy $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.

Następujące twierdzenie podaje podstawowe własności modułu.

Twierdzenie 2.10. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y oraz dowolnej liczby $c \geqslant 0$ mamy:*

1^0 $|x| \geqslant 0$;

2^0 $|-x| = |x|$;

3^0 *nierówność $|x| \leqslant c$ jest równoważna nierówności podwójnej $-c \leqslant x \leqslant c$ $(-c \leqslant x$ i $x \leqslant c)$;*

4^0 *nierówność $|x| \geqslant c$ jest równoważna alternatywie dwóch nierówności: $x \geqslant c$ lub $x \leqslant -c$;*

5^0 $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(nierówność trójkąta), przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy obydwie liczby x, y są jednocześnie nieujemne lub niedodatnie;*

6^0 $|xy| = |x||y|$;

7^0 $|x^{-1}| = |x|^{-1}$, *o ile $x \neq 0$;*

8^0 $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$.

Uwaga 2.4. (a) Własności 4^0, 5^0 można łatwo uogólnić, stosując indukcję, na dowolną skończoną liczbę składników oraz czynników.

(b) Przyjęliśmy (por. Definicja 2.1 oraz Uwaga 2.1 (b)), że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste m, M takie, że $m \leqslant x \leqslant M$ dla każdej liczby $x \in A$. Oczywiście jest to równoważne istnieniu takiej liczby rzeczywistej $c \geqslant 0$, że $|x| \leqslant c$ dla każdego $x \in A$.

Ostatnia część niniejszego paragrafu będzie miała charakter informacyjny. Liczbom rzeczywistym przyporządkowujemy punkty osi liczbowej, to jest prostej, na której obrano punkt początkowy 0 i punkt jednostkowy J. Liczbie 0 przyporządkowujemy punkt początkowy 0, natomiast dowolnej liczbie $a \neq 0$ przyporządkowujemy na danej prostej taki punkt A, którego odległość od punktu 0, mierzona jednostką długości $0J$, równa się $|a|$ $(\rho(A, 0) = |a|)$ i który znajduje się po tej samej stronie punktu 0, co punkt J, jeśli $a > 0$, natomiast po stronie przeciwnej, jeśli $a < 0$.

Powstaje naturalne pytanie: czy każdemu punktowi prostej odpowiada dokładnie jedna liczba rzeczywista? Zagadnienie to rozwiązuje się w geometrii twierdząco przez wprowadzenie aksjomatu ciągłości prostej, ustalającego dla prostej, jako zbioru punktów, własność analogiczną do aksjomatu ciągłości zbioru $\mathbb{R}$.