

ROZDZIAŁ 7

GRANICE I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

ZADANIA

Zadanie 7.1. Obliczyć następujące granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)e^x}{\cos x};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x^3 - 27};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5};$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5};$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x};$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{7x};$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x;$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 6x};$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1-x^2};$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^3}{x^2+4x+6};$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 1}).$$

Zadanie 7.2. Obliczyć następujące granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1} \right)^{2x^2-5};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x;$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2};$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}.$$

Zadanie 7.3. Wyznaczyć granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 , jeżeli:

$$(a) f(x) = 2x - \frac{|x|}{x}, \quad x_0 = 0; \qquad (c) f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3}, \quad x_0 = 3.$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 2;$$

Zadanie 7.4. Wykazać, że nie istnieją granice następujących funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \quad \text{w punkcie } -1; \qquad (b) f(x) = \cos x \quad \text{w } +\infty.$$

Zadanie 7.5. Zbadać ciągłość funkcji zadanych za pomocą wzorów:

$$(a) f(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 1, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 4, & \text{gdy } x < -2, \\ 2, & \text{gdy } x = -2, \\ 4-x^2, & \text{gdy } -2 < x \leq 2, \\ 0, & \text{gdy } x > 2; \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1}, & \text{gdy } x < 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{gdy } x < 0, \\ 2, & \text{gdy } x = 0, \\ \frac{\sin 3x}{x}, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2-7, & \text{gdy } x < 3, \\ \frac{x+1}{x-1}, & \text{gdy } 3 \leq x < 5, \\ 5, & \text{gdy } x = 6. \end{cases}$$

Zadanie 7.6. Dla jakich wartości parametrów a i b poniższe funkcje są ciągłe:

$$(a) f(x) = \begin{cases} -2, & \text{gdy } x \leq -2, \\ ax, & \text{gdy } -2 < x \leq 2, \\ b, & \text{gdy } x > 2; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} |x+2|, & \text{gdy } x \leq 1, \\ \frac{2}{x+a}, & \text{gdy } x > 1 \quad (a > -1); \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2, & \text{gdy } x < -1, \\ b(x-a)^2, & \text{gdy } -1 \leq x < 5, \\ 8, & \text{gdy } x \geq 5; \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 2 + e^{\frac{1}{x}}, & \text{gdy } x < 0, \\ a, & \text{gdy } x = 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Zadanie 7.7. Dana jest funkcja

$$f(x) = e^{2x^2+x} - \frac{2}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wykazać, że istnieje taki punkt $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, że $f(c) = 0$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 7.1. (a) $\frac{1}{2}$; (b) 1; (c) 4; (d) $\frac{1}{3}$; (e) $\frac{1}{4}$; (f) 5; (g) $\frac{3}{5}$; (h) $\frac{2}{7}$; (i) $\frac{1}{3}$; (j) $\frac{1}{2}$; (k) $\frac{1}{2}$; (l) $-\infty$; (m) 2; (n) -2; (o) $-\frac{3}{2}$.

Zadanie 7.2. (a) e^{-10} ; (b) $e^{-\frac{4}{3}}$; (c) $+\infty$; (d) 1; (e) $+\infty$; (f) 0.

Zadanie 7.3. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$; (b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$; (c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

Zadanie 7.5. (a) funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (b) funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; (c) funkcja f jest ciągła w \mathbb{R} ; (d) funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (e) funkcja f jest ciągła w $(-\infty, 5) \cup \{6\}$.

Zadanie 7.6. (a) $a = 1$ i $b = 2$; (b) $a = -\frac{1}{3}$; (c) $a_1 = -7$ i $b_1 = \frac{1}{18}$ lub $a_2 = 1$ i $b_2 = \frac{1}{2}$; (d) $a = 2$ i $b = 2$.