Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Piotr Kasprzak

Istnienie, jedyność oraz konstrukcja rozwiązań przybliżonych dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab.
Ryszarda Urbańskiego

Poznań 2008

Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi Ryszardowi Urbańskiemu
oraz
Panu Doktorowi Habilitowanemu Dariuszowi Bugajewskiemu
za okazaną życzliwość
oraz wskazówki udzielone mi podczas pisania pracy.

Spis treści

Wstęp

Równania różniczkowe zwyczajne badane są już od prawie pięciuset lat (pierwsze problemy pochodzą od Newtona i Leibnitza – twórców rachunku różniczkowego), jednakże badania nad równaniami różniczkowymi zwyczajnymi w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha (czy też ogólniejszych przestrzeniach lokalnie wypukłych) trwają zaledwie pół wieku. Wprawdzie większość klasycznych twierdzeń z przypadku skończenie wymiarowego, między innymi Twierdzenie Peano o istnieniu (zob. [25], [26]), Twierdzenie Picarda o jedyności (zob. [12]), Twierdzenie Knessera czy Twierdzenie Aronszajna o topologicznej strukturze zbioru rozwiązań (zob. [17], [2]), posiadają swoje nieskończenie wymiarowe odpowiedniki, jednak ich dowody nie są zwykłymi adaptacjami znanych dowodów, lecz wymagają o wiele subtelniejszych technik, niejednokrotnie o bardzo wysokim stopniu skomplikowania. Wartym podkreślenia jest fakt, iż poszukiwanie nowych użytecznych metod dowodowych przyczyniło się do rozwoju innych dziedzin matematyki, jak na przykład teorii punktu stałego, teorii przestrzeni funkcyjnych, teorii homologii i kohomologii.

W roku 1950 Dieudonné w pracy *Deux examples d'équations différentielles* (zob. [7]) podał prosty, ale jakże głęboki przykład równania różniczkowego w przestrzeni c_0 (wszystkich ciągów zbieżnych do zera z normą supremalną), które nie posiada rozwiązania. Owa trójstronicowa notka zapoczątkowała, można by rzec, „negatywną" teorię równań różniczkowych. Kolejne lata owocowały nowymi przykładami równań, które nie posiadają rozwiązań, aż w końcu w roku 1975 Godunow (zob. [14]) udowodnił fakt stwierdzający, iż Twierdzenie Peano może być prawdziwe jedynie w skończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha.

Wyniki „negatywne" spowodowały, że do podstawowego założenia o ciągłości prawej strony zaczęto dodawać dodatkowe założenia, by zagwarantować istnienie rozwiązania. Owe założenia podzielić można na dwie klasy:

- warunki zwartościowe – wykorzystujące np. miary niezwartości Kuratowskiego czy Hausdorffa, które gwarantują istnienie pewnego niezmienniczego zbioru zwartego i tym samym umożliwiają wykorzystanie w dowodach twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, bądź jego różnych uogólnień;

- warunki dyssypatywne – wykorzystujące iloczyny skalarne w przestrzeniach Hilberta, iloczyny półskalarne w przestrzeniach Banacha, a także całą aparaturę geometryczną, dzięki której możliwe staje się, w pewnym stopniu oczywiście, kontrolowanie zbieżności rozwiązań przybliżonych.

Przełomowym okresem dla badań nad równaniami różniczkowymi zwyczajnymi w nieskończonie wymiarowych przestrzeniach Banacha były lata 70' ubiegłego stulecia, kiedy to ukazały się prace m.in. Ambrosettiego, Celliny, Goebla, Pianigianiego, Rzymowskiego oraz Szufli. W tym miejscu warto wspomnieć, iż na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu badania dotyczące równań różniczkowych były i nadal są intensywnie prowadzone (zob. [4], [18], [28]).

Celem niniejszej pracy, inspirowanej w głównej mierze artykułem M. Turiniciego pod tytułem *Flow invariance over closed sets under general dissipativity conditions* (zob. [30]), jest przedstawienie twierdzenia typu Peano o istnieniu rozwiązań, w którym podstawowymi założeniami są pewne warunki dyssypatywne. Wyniki uzyskane przez Turiniciego można porównać z wynikami Martina (zob. [22]). Martin przyjmuje, iż odpowiednie warunki dyssypatywne spełnione są dla funkcji $(t, x) \mapsto L$, gdzie $L > 0$ jest pewną stałą (Twierdzenie 1 oraz Twierdzenie 3), nadmieniając w Uwadze 3, że może zostać ona zastąpiona funkcją quasi-liniową, tzn. funkcją postaci $(t, x) \mapsto l(t)x$, gdzie $l\colon (a, b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest pewnym odwzorowaniem ciągłym. W swojej pracy Turinici zakłada natomiast, iż funkcja ciągła $(t, x) \mapsto L(t, x)$ jest silnie normalna, przez co niezbędna staje się modyfikacja technik dowodowych. Zauważmy, że tak proste odwzorowanie jak $(t, x) \mapsto x^2$ spełnia założenia twierdzeń z pracy [30], nie spełnia zaś założeń z pracy [22]. Ponadto Martin rozważania prowadzi dla iloczynów półskalarnych pochodzących od funkcji $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$, podczas gdy Turinici rozważa iloczyny półskalarne zdefiniowane za pomocą funkcji $x \to \|x\|$, co znacząco wpływa na ich własności. Jako przykład zastosowania wyników uzyskanych w [22], Martin dowodzi twierdzeń o półgrupach operatorów nieliniowych, czego brakuje w pracy [30].

Praca niniejsza podzielona jest na siedem rozdziałów. W Rozdziale Pierwszym, wstępnym, podano konwencje i oznaczenia obowiązujące w pracy (Paragraf Pierwszy), jak również zebrano definicje oraz klasyczne twierdzenia, niezbędne w dalszej części (Paragraf Drugi).

Drugi Rozdział uwagę kieruje ku Twierdzeniu Peano; ukazuje problemy związane z nieskończenie wymiarową wersją tego twierdzenia oraz podaje warunki dostateczne, by wspomniane twierdzenie zachodziło. Choć umiejscowienie ogólnych rozważań dotyczących twierdzeń o istnieniu rozwiązań za Preliminariami może dziwić Czytelnika, to jednak rozwiązanie takie podyktowane jest strukturą następnych rozdziałów. Najogólniej mówiąc, na rozdziały od trzeciego do piątego składają się fakty, które w Rozdziałach Szóstym oraz Siódmym wszystkie jednocześnie wykorzystane są w dowodach dwóch głównych twierdzeń niniejszej pracy. Stąd też Rozdział 2 o twierdzeniach typu Peano może być traktowany jako uszczegółowiona, aczkolwiek pomijająca bardzo techniczne dowody, wersja Wstępu.

Rozdział Trzeci składa się z dwóch części. Część pierwsza w całości poświęcona jest zdefiniowaniu iloczynów pólskalarnych w przestrzeniach Banacha, a także szczegółowemu omówieniu ich własności. W części drugiej natomiast podana jest konstrukcja modułów półciągłości.

W Rozdziale Czwartym przedstawione są pewne twierdzenia o nierównościach różniczkowych. W Rozdziale Piątym natomiast, szczegółowo opisana jest konstrukcja rozwiązań przybliżonych, które w rozdziale następnym - szóstym - wykorzystane są do wykazania twierdzenia o istnieniu rozwiązania dla zagadnienia Cauchy'ego w przestrzeni Banacha w przypadku, gdy funkcja generująca prawą stronę jest określona na zbiorze wypukłym.

Rozdział Siódmy treściowo odpowiada dwóm wcześniejszym, lecz rezygnuje się w nim z wypukłości zbioru, na którym definiowane jest zagadnienie Cauchy'ego, co wymusza subtelniejsze techniki dowodowe.

Główne wyniki pochodzą z artykułu M. Turiniciego (zob. [30]); wkładem Autora niniejszej pracy jest uściślenie niektórych dowodów oraz rozumowań, jak również podanie przykładów ilustrujących rozważane zagadnienia.

Dla wygody Czytelnika niniejsza praca zaopatrzona jest w indeks rzeczowy i skorowidz symboli.

Autor pragnie podziękować Panu Profesorowi Doktorowi Habilitowanemu Ryszardowi Urbańskiemu za życzliwość i okazaną pomoc, Panu Doktorowi Habilitowanemu Dariuszowi Bugajewskiemu za wiele merytorycznych uwag i za czas poświęcony dyskusjom, a także Panu Magistrowi Marcinowi Borkowskiemu za pomoc udzieloną przy redakcji TEX-owej niniejszego tekstu.

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Konwencje i oznaczenia

W niniejszej pracy przyjęto następujące konwencje oraz oznaczenia.

Choć przez przestrzeń unormowaną rozumiemy parę uporządkowaną $(X, \|\cdot\|_X)$, składającą się z niepustego zbioru X oraz normy $\|\cdot\|_X$ określonej na X, często dla prostoty będziemy pisać „przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$” czy też „przestrzeń unormowana X”. Pisząc o klasycznych przestrzeniach Banacha L^p lub l^p, normę będziemy oznaczać przez $\|\cdot\|_p$, gdzie $p \in [1, \infty]$. Analogicznie, przez wyrażenie „przestrzeń metryczna X” będziemy rozumieć „przestrzeń metryczną (X, d_X)”, czy też „przestrzeń metryczną (X, d)”, gdzie symbol d_X lub d oznacza metrykę określoną na X.

Należy podkreślić, iż *wszystkie* rozpatrywane w niniejszej pracy przestrzenie liniowe będą rzeczywiste.

Kulę domkniętą (otwartą) w przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ o środku w punkcie x oraz promieniu $r > 0$ oznaczać będziemy przez $B_X(x, r)$ $\big(K_X(x, r)$, odpowiednio$\big)$.

Przez $C(J, X)$ będziemy oznaczać przestrzeń Banacha funkcji ciągłych $f\colon J \to X$, gdzie $J \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem zwartym, natomiast X przestrzenią Banacha. Przestrzeń $C(J, X)$ rozpatrujemy z normą supremalną $\|\cdot\|_\infty$.

W przestrzeni topologicznej (X, τ) przez $\overline{A}^\tau$ rozumieć będziemy domknięcie zbioru A. Jeżeli z kontekstu wynikać będzie, względem której topologii domknięcie jest rozważane, będziemy pisać po prostu $\overline{A}$. Brzeg zbioru A będziemy oznaczać przez ∂A.

Przez analogię z oznaczeniem funkcji f ze zbioru X do zbioru Y jako „$f\colon X \to Y$”, multifunkcję M ze zbioru X do klasy wszystkich podzbiorów zbioru Y, pomniejszonej o zbiór pusty, będziemy oznaczać przez „$M\colon X \multimap Y$”. Symbol $\int_a^b$ lub ogólnie $\int_A$, gdzie A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, będzie oznaczał całkę Lebesgue'a, gdy mowa będzie o funkcjach o wartościach rzeczywistych, bądź całkę Bochnera, gdy rozważane będą funkcję o wartościach wektorowych. Sformułowanie „zagadnienie $(1.1)_{(a,b)}$” w odniesieniu do zagadnienia początkowego

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

oznaczać będzie, że w zagadnieniu (1.1) warunek początkowy $x(t_0) = x_0$ zastępujemy warunkiem $x(a) = b$ (zakładając, iż będzie to miało sens).

Informacje dotyczące źródeł przykładów, uwag, definicji, lematów oraz twierdzeń zawartych w niniejszej pracy znaleźć można w Paragrafie Uwagi, który znajduje się na końcu każdego rozdziału.

Przez $\mathbb{R}$ będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych, przez $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, natomiast przez $\mathbb{N}_0$ zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.2 Podstawowe definicje i fakty

Celem niniejszego paragrafu jest zebranie podstawowych faktów: definicji, lematów oraz twierdzeń, które będą przydatne w dalszej części pracy. Należy zwrócić uwagę, iż nie jest to wykaz kompletny i pewne pozycje pojawią się dopiero w rozdziałach, w których będą potrzebne.

* * *

Nasz krótki wykaz zaczniemy od definicji funkcji wypukłej.

Definicja 1.1. Niech V będzie podzbiorem wypukłym przestrzeni liniowej X. Funkcję $f\colon V \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą*, jeżeli nierówność

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.2}$$

zachodzi dla wszystkich $\lambda \in [0,1]$ oraz wszystkich $x, y \in V$.

Definicja 1.2. Niech X oznacza przestrzeń Banacha, a X^* przestrzeń dualną do przestrzeni X. Dla danej funkcji wypukłej $f\colon X \to \mathbb{R}$, jej *subróżniczką* nazywamy odwzorowanie $\partial f\colon X \to X^*$ zdefiniowane wzorem

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \colon f(x) - f(u) \leqslant x^*(x-u), \forall u \in X\}. \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.1. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą. Jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0, to*

$$f'(x_0, h) = \sup\{x^*(h) \colon x^* \in \partial f(x_0)\},$$

gdzie $f'(x_0, h)$ oznacza pochodną kierunkową w punkcie $x_0 \in X$ w kierunku wektora h.

Przejdziemy teraz do pewnych pojęć z teorii funkcji o wartościach rzeczywistych.

Definicja 1.3. Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $K \subset X$ o wartościach rzeczywistych. *Granicą dolną* (*górną*) funkcji f w punkcie skupienia x_0 zbioru K nazywamy kres dolny (górny) zbioru wszelkich liczb $y \in [-\infty, +\infty]$ takich, że $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ dla pewnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnego do x_0 o wyrazach należących do K i różnych od x_0. Granicę dolną (górną) oznaczamy symbolem $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ ($\limsup_{x\to x_0} f(x)$).

Definicja 1.4. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0. Pochodne Diniego górna prawostronna i lewostronna oraz dolna prawostronna i lewostronna funkcji f w punkcie x_0 dane są następującymi wzorami:

$$\Lambda^+ f(x_0) = \limsup_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \Lambda^- f(x_0) = \limsup_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$
$$\Lambda_+ f(x_0) = \liminf_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad \Lambda_- f(x_0) = \liminf_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Twierdzenie 1.2 (Sierpiński–Young)**.** *Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ (dopuszczamy również możliwość $a = -\infty$ oraz $b = +\infty$). Wtedy zbiory*

$$\{x \in (a,b) : \Lambda^- f(x) < \Lambda_+ f(x)\} \quad i \quad \Big\{x \in (a,b) : \Lambda^+ f(x) < \Lambda_- f(x)\Big\}$$

są co najwyżej przeliczalne.

Definicja 1.5. Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $K \subset X$ o wartościach rzeczywistych. Mówimy, że funkcja f jest półciągła z dołu (góry) w punkcie $x_0 \in K$ jeśli $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$ ($\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)$) dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do K, zbieżnego do x_0.

Twierdzenie 1.3. *Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech f będzie funkcją określoną na zbiorze $K \subset X$ o wartościach rzeczywistych. Każda funkcja f jest półciągła z dołu (góry) w każdym punkcie izolowanym swojej dziedziny. Funkcja f jest półciągła z dołu (góry) w punkcie skupienia $x_0 \in K$ wtedy i tylko wtedy gdy $\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$ ($\limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$).*

Twierdzenie 1.4. *Niech f będzie funkcją określoną na przestrzeni metrycznej (X,d) o wartościach rzeczywistych. Następujące warunki są równoważne:*

a) *f jest półciągła z dołu (góry);*

b) *dla każdego $a \in \mathbb{R}$, zbiór $\{x\colon f(x) > a\}$ $\big(\{x\colon f(x) < a\}\big)$ jest otwarty;*

c) *dla każdego $a \in \mathbb{R}$, zbiór $\{x\colon f(x) \leqslant a\}$ $\big(\{x\colon f(x) \geqslant a\}\big)$ jest domknięty;*

d) *dla każdego $a < f(x_0)$ ($a > f(x_0)$) istnieje takie $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \in X$ spełniających $d(x,x_0) < \delta$ zachodzi nierówność $f(x) > a$ ($f(x) < a$).*

Definicja 1.6. Niech (X, d_X) oraz (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja $f\colon X \to Y$ spełnia warunek Lipschitza, gdy istnieje taka stała $L > 0$, że dla wszystkich $x, y \in X$ zachodzi nierówność $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leqslant L\, d_X(x,y)$.

Przykład 1.1. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, a K dowolnym podzbiorem X. Określmy funkcję $\operatorname{dist}\colon X \to [0,+\infty)$ wzorem

$$\operatorname{dist}(x,K) = \inf_{\xi\in K} d(x,\xi).$$

Dla dowolnych $x, y \in X$ oraz $\xi \in K$

$$\operatorname{dist}(x,K) \leqslant d(x,\xi) \leqslant d(x,y) + d(y,\xi).$$

Zatem

$$\operatorname{dist}(x,K) \leqslant d(x,y) + \operatorname{dist}(y,K).$$

Zamieniając zmienne x i y rolami otrzymujemy

$$\operatorname{dist}(y,K) \leqslant d(y,x) + \operatorname{dist}(x,K),$$

co prowadzi do nierówności

$$\big|\operatorname{dist}(x,K) - \operatorname{dist}(y,K)\big| \leqslant d(x,y).$$

Tym samym uzasadniliśmy, że funkcja $x \mapsto \operatorname{dist}(x,K)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$.

Definicja 1.7. Niech (X, d_X) oraz (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy *lokalnie lipschitzowską*, jeżeli dla każdego $x_0 \in X$ istnieje promień $r_0 > 0$ taki, że f spełnia warunek Lipschitza na zbiorze $\{x \in X : d_X(x_0, x) < r_0\}$.

Lemat 1.1. *Niech f będzie odwzorowaniem lokalnie lipschitzowskim zbioru mierzalnego $G \subset \mathbb{R}^d$ w przestrzeń $\mathbb{R}^d$. Wtedy obraz zbioru miary Lebesgue'a zero jest miary Lebesgue'a zero i obraz zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a jest mierzalny.*

Zajmiemy się obecnie rodzinami funkcji o wartościach rzeczywistych, szczególnie tymi, które określone są na przestrzeniach metrycznych zwartych.

Definicja 1.8. Niech $\mathfrak{A}$ będzie rodziną funkcji o wartościach rzeczywistych, określonych na przestrzeni metrycznej (X, d). Mówimy, że rodzina $\mathfrak{A}$ jest:

a) jednakowo ciągła w punkcie x_0, jeżeli:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, f \in \mathfrak{A}\ \forall\, x \in X \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

b) jednakowo ciągła na X, jeżeli:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, f \in \mathfrak{A}\ \forall\, x, y \in X \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$

c) ograniczona w zbiorze $S \subset X$, jeżeli

$$\exists\, M\ \forall\, f \in \mathfrak{A}\ \forall\, x \in S \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Uwaga 1.1. Jeżeli X jest przestrzenią metryczną zwartą, to jednakowa ciągłość rodziny $\mathfrak{A}$ w każdym punkcie $x_0 \in X$ jest równoważna jednakowej ciągłości tej rodziny na przestrzeni X.

Definicja 1.9. Obwiednią górną rodziny $\mathfrak{A}$ nazywamy funkcję $\gamma_g(x) = \sup_{f \in \mathfrak{A}} f(x)$, natomiast obwiednią dolną funkcję $\gamma_d(x) = \inf_{f \in \mathfrak{A}} f(x)$.

Wprost z Definicji 1.9 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5. *Przypuśćmy, że rodzina $\mathfrak{A}$ jest jednakowo ciągła w punkcie x_0 i niech γ_g będzie obwiednią górną tej rodziny. Jeżeli $\gamma_g(x_0) < +\infty$, to γ_g jest ciągła w punkcie x_0; jeżeli $\gamma_g(x_0) = +\infty$, to $\gamma_g(x_0) = +\infty$ w pewnym otoczeniu punktu x_0. Podobnie dla obwiedni dolnej.*

Twierdzenie 1.6 (Dini)**.** *Jeżeli przestrzeń metryczna X jest zwarta, funkcje $f\colon X \to \mathbb{R}$ jak również $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ są ciągłe, a ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i zbieżny punktowo do funkcji f na X, to zbieżność ta jest jednostajna.*

Podamy jeszcze jedno twierdzenie dotyczące przestrzeni zwartych.

Twierdzenie 1.7 (Cantor)**.** *Jeżeli przestrzeń topologiczna X jest zwarta, to dla każdego zstępującego ciągu domkniętych i niepustych podzbiorów $F_1, F_2, \ldots$ przestrzeni X zachodzi $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Przytoczymy teraz Twierdzenie Dugundjiego o przedłużaniu funkcji ciągłych oraz Twierdzenie Lagrange'a dla funkcji o wartościach wektorowych.

Twierdzenie 1.8 (Dugundji)**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $C \subset X$ zbiorem domkniętym, a $f\colon C \to Y$ funkcją ciągłą. Istnieje wtedy ciągłe przedłużenie $F\colon X \to Y$ funkcji f takie, że $F(X) \subset \operatorname{conv} f(C)$.*

Twierdzenie 1.9. *Niech $I = [a, b]$ będzie zwartym przedziałem w $\mathbb{R}$, a X przestrzenią Banacha. Załóżmy ponadto, iż $f\colon I \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym. Jeżeli istnieje przeliczalny zbiór $D \subset I$ taki, że dla każdego $x \in I \setminus D$ funkcja f posiada pochodną w punkcie x oraz $\|f'(x)\| \leqslant M$, to*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a).$$

Istotnym twierdzeniem w teorii przestrzeni Banacha jest Twierdzenie Banacha-Alaoglu. Poprzedzimy je następującą definicją.

Definicja 1.10. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Topologię na X^* zadaną przez otoczenia zera postaci

$$W^*(0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \left\{x^* \in X^* : \left|x^*(x_i)\right| < \varepsilon \text{ dla } i = 1, \ldots, n\right\},$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n \in X$, a $\varepsilon > 0$ nazywamy **-słabą topologią* i oznaczamy $\sigma(X^*, X)$.

Twierdzenie 1.10 (Banach–Alaoglu)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wtedy kula jednostkowa $B_{X^*}(0, 1)$ w przestrzeni dualnej X^* jest *-słabo zwarta.*

Podamy teraz kilka faktów dotyczących całki Bochnera.

Definicja 1.11. Niech $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, a X przestrzenią Banacha. Funkcję $f\colon \Omega \to X$ nazywamy *funkcją prostą*, gdy

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^{m} x_n \chi_{A_n}(\omega),$$

gdzie zbiory $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$ oraz $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$, tzn. gdy zbiór wartości jest skończony, a przeciwobraz każdej wartości jest zbiorem mierzalnym.

Definicja 1.12. Niech $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, a X przestrzenią Banacha. Funkcję $f\colon \Omega \to X$ nazywamy:

a) *silnie mierzalną*, gdy istnieje ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji prostych zbieżny do funkcji f dla prawie każdego ω, tzn. poza pewnym zbiorem $N \in \Sigma$ o mierze μ zero;

b) *słabo mierzalną*, gdy dla każdego funkcjonału $x^* \in X^*$ funkcja $x^* \circ f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, tzn. przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego (domkniętego) w $\mathbb{R}$ należy do Σ.

Twierdzenie 1.11 (Petis)**.** *Niech $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, a X przestrzenią Banacha. Funkcja $f\colon \Omega \to X$ jest silnie mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo mierzalna oraz istnieje taki zbiór $N \in \Sigma$ miary μ zero, że $f(\Omega \setminus N)$ jest zbiorem ośrodkowym w przestrzeni X.*

Twierdzenie 1.12 (Bochner)**.** *Niech $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, a X przestrzenią Banacha. Silnie mierzalna funkcja $f\colon \Omega \to X$ jest całkowalna w sensie Bochnera wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_\Omega \|f(\omega)\| \, d\mu < +\infty$.*

Na koniec przejdziemy do faktów dotyczących nierówności różniczkowych. W tym celu załóżmy, że rozpatrujemy funkcję o wartościach rzeczywistych $U(t, x)$ określoną na pewnym zbiorze otwartym $E \subset \mathbb{R}^2$ i dla $(t_0, u_0) \in E$ rozważmy zagadnienie Cauchy'ego

$$u'(t) = U(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0. \tag{1.4}$$

Definicja 1.13. Rozwiązaniem maksymalnym $\overline{u}(t)$ zagadnienia (1.4) nazywamy rozwiązanie nieprzedłużalne i takie, że dla dowolnego innego rozwiązania $u(t)$ zagadnienia (1.4) spełniony jest warunek $u(t) \leqslant \overline{u}(t)$, gdzie t należy do wspólnego przedziału istnienia obu rozwiązań.

Twierdzenie 1.13. *Jeżeli $U(t,u)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze otwartym $E \subset \mathbb{R}^2$, to istnieje rozwiązanie maksymalne zagadnienia* (1.4).

Twierdzenie 1.14. *Niech $U(t,u)$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze otwartym $E \subset R^2$, a $\overline{u}(t)$ będzie rozwiązaniem maksymalnym zagadnienia* (1.4). *Ponadto załóżmy, że $v(t)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[t_0, t_0 + a]$, gdzie $a > 0$, spełniającą warunki:*

a) $v(t_0) \leqslant u_0$;

b) $(t, v(t)) \in E$ *dla* $t \in [t_0, t_0 + a]$;

c) $v(t)$ *posiada prawostronną pochodną* $D^+v(t)$ *oraz* $D^+v(t) \leqslant U(t, v(t))$ *dla* $t_0 \leqslant t < t_0 + a$.

Wtedy na wspólnym przedziale istnienia $\overline{u}(t)$ i $v(t)$ spełniona jest nierówność $v(t) \leqslant \overline{u}(t)$.

Twierdzenie 1.15. *Niech $U(t,u), \overline{u}$ będą takie jak w Twierdzeniu 1.14. Niech $V(t,u)$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze E o wartościach rzeczywistych taką, że $V(t,u) \leqslant U(t,u)$ dla $(t,u) \in E$. Ponadto niech $v(t)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia*

$$v'(t) = V(t, v(t)), \quad v(t_0) = v_0 \ (\leqslant u_0)$$

na przedziale $[t_0, t_0 + a]$ dla $a > 0$. Wtedy na wspólnym przedziale istnienia funkcji $\overline{u}(t), v(t)$ na prawo od $t = t_0$ zachodzi nierówność $v(t) \leqslant \overline{u}(t)$.

Lemat 1.2. *Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na zbiorze otwartym $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ o wartościach w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i niech $x\colon J \to \mathbb{R}^d$ będzie rozwiązaniem równania $x'(t) = f(t, x(t))$ na pewnym przedziale. Wtedy $x(t)$ może zostać przedłużone na maksymalny przedział istnienia (ω_-, ω_+). Ponadto, gdy $t \to \omega_-$, bądź $t \to \omega_+$, to $x(t)$ dąży do brzegu ∂E obszaru E.*

Uwagi

Definicja 1.1 oraz Definicja 1.2 pochodzą z [3]. Również tam znaleźć można Twierdzenie 1.1 wraz z dowodem. Definicje 1.3 – 1.5 oraz Twierdzenia 1.3 i 1.4 zostały zaczerpnięte z [27]. Twierdzenie 1.2 znajduje się w [21]; jego dowód Czytelnik odnajdzie w Dodatku 3. Prawie wszystkie informacje dotyczące funkcji o wartościach rzeczywistych, o których mowa począwszy od Definicji 1.6, a kończąc na Twierdzeniu 1.6, pochodzą z [21]. Twierdzenie 1.7 w nieco innej formie odnaleźć można w [19]. Twierdzenie 1.8 zaczerpnięte zostało z [6], jednakże Deimling podaje je bez dowodu; dowód Czytelnik odnajdzie w [10] (Rozdział IX, Paragraf 6). Twierdzenie 1.9 pochodzi zaś z [7]. Odnotujmy, iż Dieudonné podaje ogólniejszy fakt, którego wspomniane twierdzenie jest szczególnym przypadkiem. Pozycje [1] i [24] dokładnie omawiają zagadnienie topologii *-słabej oraz Twierdzenie 1.10. Wszystkie fakty dotyczące całki Bochnera pochodzą z [9]; w literaturze polskiej można je odnaleźć m.in. w [1]. Twierdzenia dotyczące nierówności różniczkowych zaczerpnięte zostały z [15].

Rozdział 2

Twierdzenia typu Peano

Niniejszy rozdział może być uważany za uzupełnienie oraz rozwinięcie Wstępu. Szczegółowo omówione zostały w nim Twierdzenie Peano, Przykład Dieudonnégo, Twierdzenie Godunowa oraz warunki zapewniające istnienie rozwiązania zagadnienia początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha.

* * *

Niech $D \subset X$ będzie podzbiorem przestrzeni Banacha X, a $I \subset \mathbb{R}$ przedziałem. (Zakładamy, iż $D, I \neq \emptyset$.) Niech $x_0 \in D$ oraz $t_0 \in I$. Załóżmy, że funkcja $f(t,x)$ odwzorowuje iloczyn kartezjański $I \times D$ w X i rozważmy zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Na początku ostatniej dekady XIX wieku Giuseppe Peano w swoich pracach (zob. [25], [26]) w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}$, wykazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1 (Peano)**.** *Niech $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ oraz $D = \mathbb{R}$. Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla dowolnego $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zagadnienie* (2.1) *posiada rozwiązanie lokalne, tzn. rozwiązanie określone na pewnym otoczeniu punktu t_0.*

Przytoczone twierdzenie (prawdziwe również w przypadku $X = \mathbb{R}^n$), zwane dziś w literaturze Twierdzeniem Peano, bądź twierdzeniem o istnieniu rozwiązań, w przestrzeniach skończenie wymiarowych, stanowi punkt wyjścia dla wielu innych twierdzeń, między innymi: twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań oraz wykorzystywanego w teorii nierówności różniczkowych twierdzenia o istnieniu rozwiązań maksymalnych i minimalnych (por. Tw. 1.14).

Pojawia się zatem naturalne pytanie: „Czy rezygnując z założenia $\dim X < +\infty$ będziemy mogli nadal oczekiwać istnienia przynajmniej rozwiązań lokalnych zagadnienia (2.1)?" Odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna, a osobą której należy przypisać tę odpowiedź jest matematyk francuski Dieudonné. Rozważmy zatem następujący przykład.

Przykład 2.1. Niech $X = c_0$ będzie przestrzenią wszystkich ciągów zbieżnych do zera o wyrazach rzeczywistych, wyposażoną w normę supremalną $\|x\|_\infty = \max_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j|$ dla $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0$. Ponieważ zbiór $\{e^n\colon e^n_j = \delta_{jn},\ n \in \mathbb{N}\}$, gdzie δ_{jn} jest deltą Kroneckera, jest bazą Schaudera w przestrzeni c_0, to dla dowolnych $x, y \in c_0$ prawdziwe są poniższe równości:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e^j \qquad \text{oraz} \qquad y = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e^j.$$

Niech funkcja $f\colon c_0 \to c_0$ będzie dana wzorem:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2\sqrt{|\xi_j|}e^j.$$

Funkcja f jest jednostajnie ciągła na c_0. Istotnie, niech $\varepsilon > 0$, a $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon^2$. Wtedy dla $\|x-y\|_\infty \leqslant \delta$ mamy:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \max_{j\in\mathbb{N}}\Big|2\sqrt{|\xi_j|} - 2\sqrt{|\eta_j|}\Big| \leqslant 2\max_{j\in\mathbb{N}}\sqrt{|\xi_j - \eta_j|} \leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Niech ponadto

$$x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}e^j.$$

Jak więc widać założenia twierdzenia Peano są spełnione. Załóżmy, że istnieje rozwiązanie lokalne $x(t)$ zagadnienia

$$\begin{cases} x'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} 2\sqrt{|\xi_j(t)|}e^j, \\ x(0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}e^j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ponieważ $x(t)$ spełnia (2.2) w pewnym otoczeniu zera oraz $\xi_j(0) > 0$, więc dla każdego $j \in \mathbb{N}$ oraz wszystkich t należących do odpowiednio małego otoczenia zera U_0 spełnione jest

$$\begin{cases} \xi_j'(t) = 2\sqrt{\xi_j(t)}, \\ \xi_j(0) = j^{-2}. \end{cases}$$

Stąd dla $j \in \mathbb{N}$ oraz $t \in U_0$ mamy: $\xi_j(t) = \left(t + \frac{1}{j}\right)^2$. Skąd $\xi_j(t) \to t^2$ dla $j \to +\infty$; zatem $x(t) \notin c_0$ dla $t \neq 0$, a więc zagadnienie (2.2) nie ma rozwiązania w przestrzeni c_0.

Na pierwszy rzut oka zdawać by się mogło, iż fałszywość Twierdzenia Peano wynika ze struktury przestrzeni c_0 (nie jest ona refleksywna), jednak kontrprzykłady Yorke'a (zob. [32]) oraz Godunowa (zob. [13]) w przestrzeni l^2 rozwiały wszelkie wątpliwości. W roku 1972 Cellina (zob. [5]) pokazał, że Twierdzenie Peano jest fałszywe w każdej nierefleksywnej przestrzeni Banacha.

Ostatecznie w 1975 roku Godunow (zob. [14]) rozwiązał problem dowodząc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (Godunow)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $I = \mathbb{R}$ oraz $D = X$. Wówczas następujące warunki są równoważne*:

a) *dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R}\times X \to X$ oraz dowolnej pary $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times X$, zagadnienie Cauchy'ego* (2.1) *posiada rozwiązanie lokalne*;

b) $\dim X < +\infty$.

Godnym podkreślenia jest także fakt, że Godunow pokazał fałszywość Twierdzenia Peano nawet w jego słabszej wersji (zob. [13]); skonstruował mianowicie ciągłą funkcję $f\colon \mathbb{R}\times l^2\to l^2$ taką, że zagadnienie (2.1) nie posiadało rozwiązania dla każdego $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times l^2$.

Aby się przekonać, gdzie kryją się problemy, przyjrzyjmy się bliżej dowodowi Twierdzenia 2.1, a właściwie jego idei. Głównym pomysłem jest konstrukcja jednakowo ciągłej oraz ograniczonej rodziny funkcji ciągłych (najczęściej krzywych łamanych) określonych na pewnym przedziale zwartym $J\subset I$ o wartościach w $B_{\mathbb{R}^n}(x_0,r)$ (dla pewnego $r>0$). Wystarczy tylko wyrwać z tej rodziny ciąg jednostajnie zbieżny, by jako rozwiązanie otrzymać jego granicę i uznać dowód za zakończony. Można to zrobić w oparciu o następujący lemat.

Lemat 2.1 (Arzela-Ascoli)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $J\subset\mathbb{R}$ przedziałem zwartym. Podzbiór $M\subset C(J,X)$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy M jest jednakowo ciągły oraz zbiór $M(t)=\{x(t)\colon x\in M\}$ jest warunkowo zwarty w X dla każdego $t\in J$.*

Innym, nieco nowszym pomysłem jest dowód bazujący na poniższym Twierdzeniu Schaudera o punkcie stałym.

Twierdzenie 2.3 (Schauder)**.** *Niech K będzie niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X i niech T będzie odwzorowaniem ciągłym zbioru K w K takim, że domknięcie $\overline{T(K)}$ obrazu $T(K)$ zbioru K jest zwarte w X. Wtedy T ma punkt stały, tzn. istnieje punkt $x\in K$ taki, że $T(x)=x$.*

Dla pewnego przedziału zwartego $J\subset I$ definiuje się operator $F\colon C(J,X)\to C(J,X)$ określony wzorem

$$F(x)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(s,x(s)\right)ds\quad \text{dla } t\in J.$$

Nietrudno pokazać, że dla funkcji ciągłej f, operator F jest ciągły, a ponadto jest niezmienniczy na pewnej kuli B_C zawartej w $C(J,X)$. W przypadku, gdy X ma wymiar skończony, stosując Lemat 2.1 stwierdzamy, iż zbiór $\overline{F(B_C)}\subset B_C$ musi być zwarty, a więc operator F posiada punkt stały. Oczywiście zbiór punktów stałych rozważanego operatora pokrywa się ze zbiorem rozwiązań zagadnienia (2.1), określonych na przedziale J.

Niestety, jeżeli $\dim X=+\infty$, to Lemat 2.1 staje się bezużyteczny, o ile nie wiemy nic o zwartości zbiorów $M(t)$; a najczęściej jedyne, co możemy o nich powiedzieć to to, iż są ograniczone (cały czas zakładamy jedynie, iż funkcja f jest ciągła). *Niestety w przestrzeni unormowanej nieskończenie wymiarowej zbiory ograniczone niekoniecznie są warunkowo zwarte.* I właśnie ta subtelna różnica, nawiasem mówiąc w literaturze znana jako Twierdzenie Riesza o zwartości kuli, stanowi praprzyczynę wszelkich trudności, na które napotyka matematyk w swoich badaniach nad równaniami różniczkowymi w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha.

Znając już przyczyny problemów, zatrzymajmy się na chwilę i przyjrzyjmy się środkom, dzięki którym możliwe staje się uzyskanie pozytywnych wyników egzystencjalnych. Spośród dwóch typów warunków wymienionych we Wstępie, w tym miejscu omówimy jedynie pierwszy – a więc warunek zwartościowy – gdyż warunkami dyssypatywnymi zajmiemy się w następnych rozdziałach. Rozpatrzmy zatem poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.4 (Ambrosetti–Szufla)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $I=[0,a]$ oraz $D=B_X(x_0,r)$, gdzie $a,r>0$. Jeżeli $f\colon[0,a]\times B_X(x_0,r)\to X$ jest funkcją jednostajnie ciągłą oraz ograniczoną, tzn. $\left\|f(t,x)\right\|\leqslant c$ dla $(t,x)\in[0,a]\times B_X(x_0,r)$, a ponadto dla pewnej liczby $L\geqslant 0$ spełnia warunek*

$$\alpha(f(t,C))\leqslant L\alpha(C)\qquad \textit{dla wszystkich } t\in[0,a] \textit{ oraz } C\subset B_X(x_0,r),\tag{$*$}$$

to wtedy zagadnienie $(2.1)_{(0,x_0)}$ *posiada rozwiązanie na przedziale* $[0,b]$*, gdzie* $b \leqslant \min\{a, \frac{r}{c}\}$.

W powyższym twierdzeniu α oznacza miarę niezwartości Kuratowskiego zdefiniowaną jako:

$$\alpha(C) = \{d > 0 : \text{istnieje skończone pokrycie zbioru } C \text{ zbiorami o średnicy nie większej niż } d\},$$

jeżeli C jest zbiorem ograniczonym; w przeciwnym przypadku przyjmujemy $\alpha(C) = +\infty$.

Oczywiście Czytelnik momentalnie spostrzeże, iż to właśnie warunek $(*)$ jest czymś nowym w porównaniu z Twierdzeniem Peano (nie licząc jednostajnej ciągłości funkcji f – ale to założenie można osłabić do ciągłości, komplikując jednakże $(*)$). I właśnie dzięki niemu, po stosunkowo długim rozumowaniu, bazującym na własnościach miar niezwartości, subtelnych szacowaniach czy obliczeniach z wykorzystaniem metryki Hausdorffa, możliwe staje się wykazanie, iż zbiór rozwiązań przybliżonych jest warunkowo zwarty w przestrzeni $C([0,b],X)$, czego prostą konsekwencją, jak wiadomo z rozważań o dowodzie Twierdzenia Peano, jest istnienie rozwiązania zagadnienia początkowego $(2.1)_{(0,x_0)}$.

Na koniec warto nadmienić, iż Twierdzenie Peano jest prawdziwe w pewnych – ogólniejszych niż przestrzenie Banacha – przestrzeniach lokalnie wypukłych ciągowo zupełnych, co w głównej mierze jest zasługą topologii tych przestrzeni (dopuszczających zwarte otoczenia zera, czy zwarte beczki).

Twierdzenie 2.5 (Astala)**.** *Niech X będzie przestrzenią beczkową unormowaną, a τ topologią lokalanie wypukłą na X^* taką, że $\sigma(X^*,X) \subseteq \tau \subseteq \lambda(X^*,X)$, gdzie $\sigma(X^*,X)$ jest topologią *-słabą, a $\lambda(X^*,X)$ to topologia zbieżności prezwartej, dla której otoczenia zera są postaci*

$$U_{\varepsilon,K} = \big\{x^* \in X^* : \big|x^*(y)\big| < \varepsilon \quad \textit{dla wszystkich } y \in K\big\},$$

gdzie $K \subset X$ jest zbiorem prezwartym. Oznaczmy $E = (X^*,\tau)$ i załóżmy, że $f\colon \mathbb{R}\times E \to E$ jest ciągła. Wtedy dla dowolnego $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times E$ zagadnienie (2.1) *posiada rozwiązanie lokalne.*

Uwagi

Przykład 2.1, Lemat 2.1 oraz Twierdzenie 2.4 zaczerpnięte zostały z [6]. Tam również Czytelnik odnajdzie dowód Twierdzenia 2.4, a także uogólnienie, o którym wspomniano w tekście (Rozdział 2, Paragraf 3). Twierdzenie 2.2 pochodzi z [12]. Czytelnik zainteresowany dowodem Twierdzenia 2.3 znajdzie go w [24]. Oprócz Twierdzenia 2.5 praca [16] zawiera ponadto wyniki dotyczące własności zbioru rozwiązań w przestrzeniach lokalnie wypukłych, a także ważny związek własności Peano z refleksywnością przestrzeni.

Rozdział 3

Iloczyny półskalarne, moduły półciągłości

W Paragrafie 3.1 podamy kilka sposobów definiowania iloczynu półskalarnego w przestrzeni Banacha. W oparciu o odwzorowanie dualne, podamy związki iloczynów z subróżniczką normy, a także wykażemy liczne ich własności. Zaprezentowaną teorię zilustrujemy przykładami w przestrzeniach l^p. Paragraf 3.2 poświęcony będzie modułom półciągłości.

W niniejszym rozdziale, jeżeli nie będzie wspomniane inaczej, przez X będziemy zawsze rozumieć przestrzeń Banacha, a przez X^* jej przestrzeń dualną.

3.1 Iloczyny półskalarne

Podobnie jak w pracy [30] oznaczmy dla prostoty:

$$\psi_f(t,u,v) = \frac{1}{t}\left[f(u+tv) - f(u)\right], \quad \text{dla } t \neq 0 \text{ oraz } u,v \in V, \tag{3.1}$$

gdzie V oznacza przestrzeń liniowo-topologiczną, a $f\colon V \to \mathbb{R}$. Przy ustalonych u, v funkcję $\psi_f(t,u,v)$ zmiennej t można interpretować jako iloraz różnicowy funkcji f w punkcie u w kierunku wektora v.

Istotną rolę w dalszych rozważaniach odgrywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1. *Niech V będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i niech funkcja $f\colon V \to \mathbb{R}$ będzie wypukła (por. Def. 1.1). Wtedy dla dowolnych $u, v \in V$ funkcja $t \mapsto \psi_f(t,u,v)$ jest rosnąca w swojej dziedzinie. W szczególności więc istnieją granice*

$$\lim_{t\to 0^-} \psi_f(t,u,v) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{t\to 0^+} \psi_f(t,u,v). \tag{3.2}$$

Dowód. Z wypukłości funkcji f dla $0 < t < s$ mamy:

$$\begin{aligned} f(u+tv) - f(u) &= f\left(\frac{t}{s}(u+sv) + \left(1 - \frac{t}{s}\right)u\right) - f(u) \\ &\leqslant \frac{t}{s}f(u+sv) + \left(1-\frac{t}{s}\right)f(u) - f(u) \\ &\leqslant \frac{t}{s}\left[f(u+sv) - f(u)\right]. \end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że funkcja $\psi_f(t,u,v)$ jest rosnąca dla $t>0$; podobnie dowodzimy, iż rozważana funkcja jest rosnąca dla $t<0$. By dowód można było uznać za ukończony, wystarczy jeszcze wykazać, iż wartości funkcji ψ_f dla t leżących na prawo od zera są nie mniejsze od wartości dla t znajdujących się po ujemnej stronie. W tym celu obierzmy $t>0$ oraz $s<0$ i zauważmy, że

$$f(u)=f\left(\frac{s}{s-t}(u+tv)+\frac{-t}{s-t}(u+sv)\right)\leqslant\frac{s}{s-t}f(u+tv)+\frac{-t}{s-t}f(u+s).$$

Stąd

$$f(u)\leqslant\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\right)^{-1}f(u+tv)-\frac{1}{s}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{s}\right)^{-1}f(u+sv),$$

skąd już łatwo otrzymujemy, iż $\psi_f(s,u,v)\leqslant\psi_f(t,u,v)$ dla $t>0$ oraz $s<0$. □

Przyjmując w powyższym twierdzeniu $V=X$ i $f=\|\cdot\|$ oraz oznaczając $\psi=\psi_{\|\cdot\|}$ stwierdzamy, że dla dowolnych $x,y\in X$ granice:

$$\lim_{t\to0^-}\psi(t,x,y)\qquad\text{oraz}\qquad\lim_{t\to0^+}\psi(t,x,y)$$

istnieją. Możliwe jest zatem wprowadzenie następującej definicji:

Definicja 3.1. Dla dowolnych $x,y\in X$ granicę

a) $\lim_{t\to0^+}\psi(t,x,y)$ nazywamy *górnym iloczynem półskalarnym* x oraz y i oznaczamy $[x,y]_s$,

b) $\lim_{t\to0^-}\psi(t,x,y)$ nazywamy *dolnym iloczynem półskalarnym* x oraz y i oznaczamy $[x,y]_i$.

Wprost z Twierdzenia 3.1 oraz Definicji 3.1 wynika, iż zawsze (tzn. dla dowolnych $x,y\in X$) spełniona jest nierówność $[x,y]_i\leqslant[x,y]_s$.

Zdefiniujmy teraz multifunkcję $J\colon X\multimap X^*$, zwaną *odwzorowaniem dualnym na przestrzeni* X, wzorami:

$$J(x)=\begin{cases}\{x^*\in X^*:\|x^*\|=1\quad\text{i}\quad x^*(x)=\|x\|\}, & \text{dla } x\neq0,\\ \{x^*\in X^*:\|x^*\|\leqslant1\}, & \text{dla } x=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

Naszym celem będzie obecnie wykazanie poniższego lematu.

Lemat 3.1. *Jeżeli $J\colon X\multimap X^*$ jest odwzorowaniem dualnym na przestrzeni X, to dla każdego $x\in X$ $\quad J(x)=\partial(x)$, gdzie $\partial(x)$ oznacza subróżniczkę normy w punkcie x (por. Def. 1.2).*

Dowód. a) Niech $x=0$ i załóżmy, że $\|x^*\|\leqslant1$. Jest to równoważne z warunkiem: dla dowolnego $u\in X$ mamy $x^*(u)\leqslant\|u\|$, co z kolei jest równoważne z faktem, iż $x^*\in\partial(0)$, a więc istotnie $J(0)=\partial(0)$.

b) Niech teraz $x\neq0$. Weźmy $x^*\in J(x)$. Wtedy dla dowolnego $u\in X$ mamy

$$x^*(x-u)=x^*(x)-x^*(u)\geqslant\|x\|-\|u\|,$$

co implikuje, iż $x^*\in\partial(x)$.

Z drugiej strony, niech $x^*\in\partial(x)$. Z Definicji 1.2 wynika, że dla wszystkich $u\in X$ zachodzi $x^*(x-u)\geqslant\|x\|-\|u\|$. Niech $u=x+\lambda v$, gdzie $\lambda>0$, a $v\in X$. Wtedy

$$x^*(-\lambda v)\geqslant\|x\|-\|x+\lambda v\|\geqslant\|x\|-\|x\|-\lambda\|v\|=-\lambda\|v\|.$$

Stąd
$$-\lambda x^*(v) \geqslant -\lambda \|v\|,$$
co dowodzi, że dla wszystkich $v \in X$ zachodzi nierówność $x^*(v) \leqslant \|v\|$; czyli $\|x^*\| \leqslant 1$. Obierając $u = (1-\lambda)x$, gdzie $0 < \lambda < 1$, wnosimy, iż
$$\lambda x^*(x) = x^*(x - (1-\lambda)x) \geqslant \|x\| - (1-\lambda)\|x\| = \lambda \|x\|.$$
Więc $x^*(x) \geqslant \|x\|$; wraz z faktem, iż $\|x^*\| \leqslant 1$, mamy $x^*(x) = \|x\|$ oraz $\|x^*\| = 1$, co kończy dowód.

□

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania oraz Twierdzenie 1.1 możemy górny iloczyn półskalarny x oraz y wyrazić w następujący sposób:
$$[x,y]_s = \sup_{x^* \in J(x)} x^*(y). \tag{3.4}$$
Można łatwo zauważyć, że
$$[x,y]_i = -[x,-y]_s, \tag{3.5}$$
a zatem dolny iloczyn półskalarny możemy opisać związkiem
$$[x,y]_i = \inf_{x^* \in J(x)} x^*(y). \tag{3.6}$$
Przed przystąpieniem do wykazania pewnych własności iloczynów półskalarnych podamy jeszcze jeden sposób ich wyrażania; z uwagi na monotoniczność funkcji $t \mapsto \psi(t,x,y)$ możemy napisać:
$$[x,y]_i = \sup_{t<0} \psi(t,x,y) \qquad \text{oraz} \qquad [x,y]_s = \inf_{t>0} \psi(t,x,y).$$
Podamy także kilka definicji, niezbędnych do sformułowania twierdzeń.

Definicja 3.2. Przestrzeń unormowaną X nazywamy:

a) *ściśle wypukłą* jeżeli $x \neq y$ oraz $\|x\| = \|y\| = 1$ implikują $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ dla wszystkich $\lambda \in (0,1)$;

b) *jednostajnie wypukłą* jeżeli dla każdego $\varepsilon \in (0,2]$ istnieje taka $\delta > 0$, że $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ oraz $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ implikują $\|x+y\| \leqslant 2(1-\delta)$;

c) *gładką*, gdy dla każdego $x \neq 0$ zbiór $\{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1 \quad \text{i} \quad x^*(x) = \|x\|\}$ jest jednopunktowy.

Definicja 3.3. Mówimy, że odwzorowanie wielowartościowe $M\colon S \multimap T$, gdzie S oraz T są przestrzeniami topologicznymi, jest *półciągłe z góry w punkcie* s, gdy dla dowolnego otoczenia $U_{M(s)}$ zbioru $M(s)$ istnieje otoczenie U_s punktu s takie, że $M(U_s) = \bigcup_{t \in U_s} M(t) \subset U_{M(s)}$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które ukazuje zachowanie odwzorowania dualnego.

Twierdzenie 3.2. *Niech $J\colon X \multimap X^*$ będzie odwzorowaniem dualnym na przestrzeni X. Wtedy:*

a) *dla każdego $x \in X$ zbiór $J(x)$ jest wypukły oraz *-słabo domknięty, a ponadto dla $\lambda \neq 0$ zachodzi równość $J(\lambda x) = \operatorname{sgn} \lambda \cdot J(x)$.*

b) *J jest półciągłe z góry pomiędzy przestrzenią X wyposażoną w topologię normową a przestrzenią X^* wyposażoną w topologię *-słabą.*

c) *Jeżeli X^* jest ściśle wypukła, to dla $x \neq 0$ zbiór $J(x)$ jest jednopunktowy. Ponadto, jeżeli X jest przestrzenią Hilberta, to $J(x) = x\,\|x\|^{-1}$ dla $x \neq 0$.*

d) *Jeżeli X^* jest jednostajnie wypukła, to dla dowolnego $r > 0$ funkcja $J\colon X \setminus B_X(0,r) \to X^*$ jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. a) Oczywiście zbiór $J(0) = B_{X^*}(0,1)$ jest wypukły. Niech więc $x \neq 0$ oraz $y^*, z^* \in J(x)$ i $\lambda \in (0,1)$. Wtedy $(\lambda y^* + (1-\lambda)z^*)(x) = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|x\| = \|x\|$. Ponadto, z powyższej równości wynika, iż $\|\lambda y^* + (1-\lambda)z^*\| \geqslant 1$. Nietrudno sprawdzić, że zachodzi również nierówność $\|\lambda y^* + (1-\lambda)z^*\| \leqslant 1$, a więc $\lambda y^* + (1-\lambda)z^* \in J(x)$.

Niech $\lambda \neq 0$ i niech $x \neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} J(\lambda x) &= \{y^* \in X^* : \|y^*\| = 1 \quad \text{oraz} \quad y^*(\lambda x) = \|\lambda x\|\} \\ &= \{y^* \in X^* : \|y^*\| = 1 \quad \text{oraz} \quad \lambda y^*(x) = |\lambda|\,\|x\|\} \\ &= \operatorname{sgn}\lambda \cdot J(x). \end{aligned}$$

Jasne jest, że kula $B_{X^*}(0,1)$ jest domknięta w topologii *-słabej. Załóżmy więc, że $x \neq 0$ i niech y^* należy do domknięcia zbioru $J(x)$ w rozważanej topologii, tzn. istnieje sieć $(x^*_\mu)_\mu$ o elementach ze zbioru $J(x)$ taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnego $z \in X$ znajdziemy taki indeks $\mu_{z,\varepsilon}$, że dla wszystkich indeksów $\mu \geqslant \mu_{z,\varepsilon}$ zachodzi nierówność $\left|x^*_\mu(z) - y^*(z)\right| < \varepsilon$; w szczególności $\left|\|x\| - y^*(x)\right| < \varepsilon$ dla $\mu \geqslant \mu_{x,\varepsilon}$. To pokazuje, iż $y^*(x) = \|x\|$, a zatem także $\|y^*\| \geqslant 1$. Ponadto dla dowolnego $z \in X$ takiego, że $\|z\| = 1$ mamy

$$|y^*(z)| \leqslant |x^*_{\mu_{z,\varepsilon}}(z) - y^*(z)| + |x^*_{\mu_{z,\varepsilon}}(z)| \leqslant |x^*_{\mu_{z,\varepsilon}}(z) - y^*(z)| + 1 < 1 + \varepsilon,$$

a zatem $\|y^*\| \leqslant 1$, co dowodzi domkniętości $J(x)$.

b) Najpierw sprawdzimy półciągłość z góry dla $x = 0$. Niech więc U_B będzie dowolnym otoczeniem zbioru $J(0) = B_{X^*}(0,1)$ w topologii *-słabej. Wtedy biorąc np. $U_0 = X$ mamy:

$$J(X) = \bigcup_{x \in X} J(x) \subset B_{X^*}(0,1) \subset U_B.$$

Niech obecnie $x \neq 0$ i załóżmy, iż multifunkcja J nie jest półciągła z góry w punkcie x. Na mocy Definicji 3.3 istnieje wtedy otoczenie $U_{J(x)}$ takie, że dla wszystkich otoczeń U_x mamy $J(U_x) \not\subseteq U_{J(x)}$. Znajdziemy zatem ciągi: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że $x_n \to x$, gdy $n \to +\infty$ oraz $x^*_n \in J(x_n)$, ale $x^*_n \notin U_{J(x)}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Niech $M_k = \overline{\{x^*_n : n \geqslant k\}}^{\sigma(X^*,X)}$ będzie domknięciem zbioru $\{x^*_n : n \geqslant k\}$ w topologii *-słabej. Oczywiście M_k są podzbiorami kuli jednostkowej $B_{X^*}(0,1)$, więc jako zbiory ograniczone i domknięte są *-słabo zwarte na mocy Twierdzenia Banacha-Alaoglu (Tw. 1.10). Ponieważ ponadto $M_{k+1} \subset M_k$, to na mocy Twierdzenia Cantora (Tw. 1.7)

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \neq \emptyset.$$

Wybierzmy, więc $x^* \in M$. Oczywiście wtedy $x^* \notin U_{J(x)}$, ponieważ $M_k \cap U_{J(x)} = \emptyset$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Z drugiej strony pokażemy, że $x^* \in J(x) \subset U_{J(x)}$. Ponieważ $x^* \in M_k$ dla dowolnego k, zatem istnieje $x^*_{n_k} \in M_k$, który jednocześnie należy do otoczenia zera w *-słabej topologii

$$W^*_k = W^*(x^*, x, k^{-1}) = \left\{ y^* \in X^* : |x^*(x) - y^*(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Znajdziemy zatem ciąg $(x^*_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (gdzie $n_k \geqslant k$), będący podciągiem ciągu $(x^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i taki, że $x^*_{n_k} \in W^*_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \big|x^*(x) - \|x\|\big| &\leqslant \big|x^*(x) - x^*_{n_k}(x)\big| + \big|x^*_{n_k}(x - x_{n_k})\big| + \big|x^*_{n_k}(x_{n_k}) - \|x\|\big| \\ &\leqslant \frac{1}{k} + \|x^*_{n_k}\|\|x - x_{n_k}\| + \big|\|x_{n_k}\| - \|x\|\big| \to 0 \quad \text{dla } k \to +\infty, \end{aligned}$$

a zatem $x^*(x) = \|x\|$.Ponadto dla dowolnego $z \in X$ takiego, że $\|z\| = 1$ mamy

$$\big|x^*(z)\big| \leqslant \big|x^*(z) - x^*_{n_0}(z)\big| + \big|x^*_{n_0}(z)\big| < 1 + \frac{1}{k},$$

gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$ jest tak dobrane, by $x^*_{n_0} \in W^*(x^*, z, k^{-1})$. To dowodzi, iż $\|x^*\| \leqslant 1$, a więc $x \in J(x)$. Wykazana sprzeczność pokazuje, że multifunkcja J jest półciągła z góry na X.

c) Jak wykazaliśmy w podpunkcie a) zbiory $J(x)$ dla $x \neq 0$ są wypukłe, a ponadto są podzbiorami sfery jednostkowej. Ponieważ przestrzeń jest ściśle wypukła (por. Def. 3.2), zatem muszą być one jednopunktowe. Załóżmy dodatkowo, że X jest przestrzenią Hilberta. Dla $x \neq 0$ mamy

$$J(x) = \big\{ y \in X : \|y\| = 1 \quad \text{oraz} \quad \langle x, y\rangle = \|x\| \big\},$$

gdzie $\langle x, y\rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta X. Otrzymujemy zatem

$$\|x\| = \big|\langle x, y\rangle\big| \leqslant \|x\| \, \|y\| = \|x\|,$$

a więc nierówność Schwarza staje się równością. Jest to możliwe tylko w przypadku, gdy wektory x oraz y są współliniowe. Istnieje zatem taka stała $c \neq 0$, że $x = cy$, a więc $y = x\|x\|^{-1}$.

d) Ponieważ jednostajna wypukłość implikuje ścisłą wypukłość, więc J faktycznie jest funkcją. Przypuśćmy, iż $J\colon X \setminus B_X(0, r) \to X^*$ nie jest jednostajnie ciągła dla pewnego $r > 0$. Wtedy znajdziemy ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach ze zbioru $X \setminus B_X(0, r)$ i takie, że $\|x_n - y_n\| \to 0$, gdy $n \to +\infty$ oraz $\big\|J(x_n) - J(y_n)\big\| \geqslant \varepsilon_0$ dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ oraz wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ale wtedy z założenia $\big\|J(x_n) + J(y_n)\big\| \leqslant 2(1 - \delta)$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdyż $\big\|J(x_n)\big\| = \big\|J(y_n)\big\| = 1$. Z drugiej strony, na podstawie podpunktu a) oraz poniższego warunku

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| \leqslant \frac{2}{\|x_n\|} \|x_n - y_n\| \leqslant \frac{2}{r} \|x_n - y_n\| \to 0, \qquad \text{gdy } n \to +\infty,$$

możemy założyć, iż $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$, a wtedy

$$\big\|J(x_n) + J(y_n)\big\| \geqslant J(x_n)(x_n) + J(y_n)(x_n) = \|x_n\| + \|y_n\| + J(y_n)(x_n - y_n) \geqslant 2 - \|x_n - y_n\|$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, co prowadzi do sprzeczności.

□

Zwróćmy uwagę na fakt, iż wartość multifunkcji J nie zależy od odległości punktu x od zera przestrzeni, a tylko od pewnego kąta. Funkcje takie nazywamy *funkcjami radialnymi.* Jeśli rozważymy szczególny przypadek $X = \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową, to dla $(x, y) \neq (0, 0)$ w wyniku działania J otrzymamy punkt leżący na przecięciu okręgu jednostkowego oraz półprostej przechodzącej przez punkty $(0, 0)$ oraz (x, y).

W poniższym twierdzeniu, pisząc o własnościach iloczynów półskalarnych, poprzez użycie symbolu $[x, y]_{s/i}$ będziemy rozumieć, że dana własność zachodzi zarówno dla iloczynu półskalarnego górnego, jak i dolnego.

Twierdzenie 3.3. *Niech $[x, y]_s$ oraz $[x, y]_i$ oznaczają iloczyny półskalarne: górny i dolny odpowiednio. Wtedy:*

a) $[x, y + z]_s \leqslant [x, y]_s + [x, z]_s$ *oraz* $[x, y + z]_i \geqslant [x, y]_i + [x, z]_i$;

b) $\left|[x, y]_{s/i}\right| \leqslant \|y\|$;

c) $[x, y + \alpha x]_{s/i} = [x, y]_{s/i} + \alpha \|y\| \quad$ *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$;

d) $[\alpha x, \beta y]_{s/i} = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \beta [x, y]_{s/i} \quad$ *dla* $\alpha \cdot \beta > 0$;

e) *odwzorowanie* $y \mapsto [x, y]_{s/i}$ *jest nierozszerzające*;

f) $[x, y]_s = [x, y]_i$ *jeżeli* X^* *jest ściśle wypukła oraz* $x \neq 0$; *w przypadku przestrzeni Hilberta dla* $x \neq 0$ *mamy* $[x, y]_s = [x, y]_i = \|x\|^{-1} \langle y, x \rangle$;

g) $[x, y]_s = \max_{x^* \in J(x)} x^*(y) \quad$ *oraz* $\quad [x, y]_i = \min_{x^* \in J(x)} x^*(y)$;

h) *Jeżeli* X^* *jest jednostajnie wypukła, to dla dowolnego* $r > 0$ *oraz dowolnego zbioru ograniczonego* $A \subset X$ *iloczyny* $[x, y]_{s/i} \colon X \setminus B_X(0, r) \times A \to \mathbb{R}$ *są jednostajnie ciągłe*;

i) $[x, y]_s$ *jest półciągły z góry, natomiast* $[x, y]_i$ *jest półciągły z dołu na* $X \times X$;

j) *iloczyny* $[x, y]_{s/i}$ *są ciągłe na* $\big(X \setminus \{0\}\big) \times X$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* X *jest przestrzenią gładką*;

k) *jeżeli* $u(t) \colon (a, b) \to X$ *jest funkcją różniczkowalną w punkcie* $t \in (a, b)$, *a* $\xi(t) = \|u(t)\|$, *to wtedy*:

$$D^- \xi(t) = [u(t), u'(t)]_i \quad \text{oraz} \quad D^+ \xi(t) = [u(t), u'(t)]_s,$$

gdzie $D^- \xi(t)$ *oraz* $D^+ \xi(t)$ *oznaczają pochodną lewo- i prawostronną funkcji* ξ *w punkcie* t.

Dowód. W niniejszych dowodach w przypadku, gdy własność zachodzi dla obydwu iloczynów półskalarnych, ograniczmy się do dowodów wyłącznie dla iloczynu półskalarnego górnego.

a) Własność ta wynika z oczywistej nierówności

$$\sup_{x^* \in J(x)} x^*(y + z) \leqslant \sup_{x^* \in J(x)} x^*(y) + \sup_{x^* \in J(x)} x^*(z).$$

b) Dla dowolnego $t \neq 0$ mamy:

$$\left| \frac{1}{t} \big(\|x + ty\| - \|x\| \big) \right| \leqslant \|y\| .$$

Wystarczy teraz przejść granicznie, by otrzymać tezę.

c) Mamy:

$$[x, y+\alpha x]_s = \sup_{x^*\in J(x)} [x^*(y) + x^*(\alpha x)] = \sup_{x^*\in J(x)} [x^*(y) + \alpha \|x\|] = [x,y]_s + \alpha \|x\|.$$

d) Z uwagi na Twierdzenie 3.2 a), $J(\alpha x) = \operatorname{sgn}\alpha \cdot J(x)$ dla $\alpha \neq 0$, a zatem

$$[\alpha x, \beta y]_s = \sup_{x^*\in J(\alpha x)} x^*(\beta y) = \sup_{x^*\in J(x)} \operatorname{sgn}\alpha \cdot \beta x^*(y) = \operatorname{sgn}\alpha \cdot \beta [x,y]_s.$$

e) Dla dowolnego $t \neq 0$ mamy

$$\Big|\frac{1}{t}(\, \|x+ty_1\| - \|x\|\,) - \frac{1}{t}(\, \|x+ty_2\| - \|x\|\,)\Big| \leqslant \Big|\frac{1}{t}\|ty_1 - ty_2\|\Big| = \|y_1 - y_2\|;$$

przejście graniczne daje więc tezę.

f) Jeżeli X^* jest ściśle wypukła, to dla $x \neq 0$ zbiory $J(x)$ są jednopunktowe (por. Tw. 3.2 c)), więc

$$[x,y]_s = \sup_{x^*\in J(x)} x^*(y) = \inf_{x^*\in J(x)} x^*(y) = [x,y]_i.$$

Niech teraz X będzie przestrzenią Hilberta oraz $x \neq 0$; wtedy $[x,y]_{s/i} = x^*(y) = \|x\|^{-1}\langle y, x\rangle$.

g) Ponieważ $J(x)$ jest *-słabo zwarty dla $x \in X$ i funkcja $\phi\colon X^* \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\phi(x^*) = x^*(y)$ dla ustalonego y jest *-słabo ciągła, musi więc osiągać swoje kresy na $J(x)$.

h) Niech $\varepsilon > 0$ będzie ustalone. Na podstawie Twierdzenia 3.2 d) możemy wybrać $\delta_1 > 0$ niezależne od ε, tak by $\|J(x_1) - J(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2r}\varepsilon$ dla $\|x_1 - x_2\| < \delta_1$, gdzie $r > 0$ oznacza promień kuli domkniętej, w której zawiera się zbiór A. Obierzmy $\delta = \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\varepsilon\}$. Wtedy dla $\|x_1 - x_2\| < \delta$ oraz $\|y_1 - y_2\| < \delta$, na podstawie poprzednich podpunktów, mamy

$$\begin{aligned}\Big|[x_1,y_1]_s - [x_2,y_2]_s\Big| &\leqslant \Big|[x_1,y_1]_s - [x_1,y_2]_s\Big| + \Big|[x_1,y_2]_s - [x_2,y_2]_s\Big| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \|J(x_1) - J(x_2)\|\,\|y_2\| \leqslant \delta + \frac{\varepsilon}{2r}\cdot r \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

i) Dla prostoty zdefiniujmy zbiory:

$$A_{t,u} = \{(x,y) : \|x+ty\| < u\} \quad \text{i} \quad B_{t,u} = \{(x,y) : u - ta < \|x\|\} \quad \text{dla } t,u \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście powyższe zbiory są otwarte, jako przeciwobrazy odpowiednich zbiorów otwartych przez funkcje ciągłe. Wybierzmy dowolne $a \in \mathbb{R}$. Wtedy przeciwobraz

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot]_s^{-1}(-\infty, a) &= \{(x,y)\colon \inf_{t>0} \psi(t,x,y) < a\} = \{(x,y) : \exists\, t>0 \;\; \psi(t,x,y) < a\} \\ &= \bigcup_{t>0} \{(x,y) : \psi(t,x,y) < a\} = \bigcup_{t>0} \{(x,y) : \|x+ty\| - \|x\| < ta\} \\ &= \bigcup_{t>0} \{(x,y) : \exists\, u \in \mathbb{R} \;\; \|x+ty\| < u < \|x\| + ta\} = \bigcup_{t>0}\bigcup_{u\in\mathbb{R}} A_{t,u} \cap B_{t,u}\end{aligned}$$

jest zbiorem otwartym, co na mocy Twierdzenia 1.4 kończy dowód.

j) ($\Leftarrow$) Niech $(x_0, y_0) \in (X \setminus \{0\}) \times X$ oraz niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ X jest gładka, więc dla $x \neq 0$ zbiory $J(x)$ są jednopunktowe. Z Twierdzenia 3.2 b) wynika, iż istnieje takie $\eta > 0$, że dla $x \in X$ spełniających warunek $\|x - x_0\| < \eta$ mamy

$$x^* = J(x) \in W^*(x_0^*, y_0, \tfrac{1}{2}\varepsilon) = \Big\{z^* \in X^* : |x_0^*(y_0) - z^*(y_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\Big\},$$

gdzie $x_0^* = J(x_0)$. Obierzmy $\delta = \min\Big\{\eta, \tfrac{1}{2}\varepsilon\Big\}$; jeżeli tylko $\|x - x_0\| < \delta$ oraz $\|y - y_0\| < \delta$, to na podstawie podpunktu e) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Big|[x_0, y_0]_s - [x, y]_s\Big| &\leqslant \Big|[x_0, y_0]_s - [x, y_0]_s\Big| + \Big|[x, y_0]_s - [x, y]_s\Big| \\ &\leqslant |x_0^*(y_0) - x^*(y_0)| + \|y_0 - y\| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Zatem $[x, y]_s$ jest ciągły na $(X \setminus \{0\}) \times X$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, iż $[x, y]_s$ jest ciągły; tym samym $[x, y]_i$ jest również ciągły (por. (3.5)). Przypuśćmy, że

$$[x, y]_i < [x, y]_s \quad \text{dla pewnych } x \in X \setminus \{0\} \text{ oraz } y \in X.$$

Dla prostoty oznaczmy: $\chi(t) = \|x + ty\|$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wtedy:

$$D^-\chi(t) = \lim_{s \to 0^-} \frac{\|x + (t + s)y\| - \|x + ty\|}{s} = [x + ty, y]_i$$

oraz

$$D^+\chi(t) = \lim_{s \to 0^+} \frac{\|x + (t + s)y\| - \|x + ty\|}{s} = [x + ty, y]_s.$$

Z ciągłości odwzorowania $t \mapsto D^-\chi(t)$ jak i $t \mapsto D^+\chi(t)$ w otoczeniu zera (na mocy założenia) oraz nierówności $D^-\chi(0) < D^+\chi(0)$ wynika, iż znajdziemy takie $\varepsilon > 0$, że dla wszystkich $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ zachodzi $D^-\chi(t) < D^+\chi(t)$. Otrzymana nierówność jest sprzeczna z Twierdzeniem Sierpińskiego–Younga (Tw. 1.2) Tym samym podpunkt został udowodniony.

k) Oznaczmy

$$R(\xi, s, t) = \frac{1}{s - t}\big(\xi(s) - \xi(t)\big) \quad \text{dla} \quad s, t \in \mathbb{R},\ s \neq t.$$

Wtedy prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$|R(\xi, s, t) - \psi(s - t, u(t), u'(t))| \leqslant \frac{\|u(s) - u(t) - (s - t)u'(t)\|}{|s - t|}$$

Przechodząc graniczne w powyższej nierównośći z $s \to t^+$ otrzymujemy tezę.

□

Dla pewnych przestrzeni X stosunkowo łatwo można obliczyć $J(x)$ wprost, a tym samym i iloczyny półskalarne. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 3.1. a) Niech $X = l^p$, gdzie $1 < p < +\infty$. Wtedy $(l^p)^* = l^q$, gdzie q jest wykładnikiem sprzężonym z p. Ponieważ dla tak określonych wykładników przestrzenie l^p są ściśle wypukłe, na podstawie Twierdzenia 3.2 c) wnioskujemy, że zbiór $J(x)$ jest jednopunktowy dla $x = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}} \neq 0$. Z drugiej strony, na mocy definicji multifunkcji J:

$$J(x) = \big\{z^* = (\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^q : \|z^*\|_q = 1 \text{ oraz } z^*(x) = \|x\|_p\big\}.$$

Oznaczmy $z^* = (\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$\zeta_j = \|x\|_p^{1-p} |\xi_j|^{p-1} \operatorname{sgn} \xi_j \quad \text{dla } j \geqslant 1.$$

By pokazać, że $z^* = J(x)$ wystarczy wykazać, że $z^* \in J(x)$. Mamy:

$$\|z^*\|_q = \|x\|_p^{1-p} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^{q(p-1)}\Big)^{1/q} = \|x\|_p^{1-p} \|x\|_p^{p/q} = 1.$$

Ponadto

$$z^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \zeta_j = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \|x\|_p^{1-p} |\xi_j|^{p-1} \operatorname{sgn} \xi_j = \|x\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = \|x\|_p .$$

Dla $y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^p$ możemy zatem zapisać:

$$[x,y]_s = \begin{cases} \|y\|_p & \text{dla } x = 0, \\ \|x\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^{p-1} \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j & \text{dla } x \neq 0, \end{cases}$$

oraz

$$[x,y]_i = \begin{cases} -\|y\|_p & \text{dla } x = 0, \\ \|x\|_p^{1-p} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^{p-1} \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

b) Dla $X = L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, gdzie $1 < p < +\infty$, rozumując podobnie jak w poprzednim podpunkcie otrzymamy:

$$[x,y]_s = \begin{cases} \|y\|_p & \text{dla } x = 0, \\ \|x\|_p^{1-p} \int_\Omega |x(\omega)|^{p-1} y(\omega) \operatorname{sgn} x(\omega) d\mu(\omega) & \text{dla } x \neq 0, \end{cases}$$

oraz

$$[x,y]_i = \begin{cases} -\|y\|_p & \text{dla } x = 0, \\ \|x\|_p^{1-p} \int_\Omega |x(\omega)|^{p-1} y(\omega) \operatorname{sgn} x(\omega) d\mu(\omega) & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

c) Niech $X = l^1$; ponieważ $(l^1)^* = l^\infty$, to możemy napisać dla $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \neq 0$:

$$J(x) = \{z^* = (\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty : z^*(x) = \|x\|_1 \quad \text{oraz} \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} |\zeta_j| = 1\}.$$

Załóżmy, że $\xi_k \neq 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| \zeta_j \operatorname{sgn} \xi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \xi_j = \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|,$$

a więc $\zeta_k \operatorname{sgn} \xi_k = 1$. Stąd

$$J(x) = \{z^* = (\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \zeta_j = \operatorname{sgn} \xi_j \text{ dla } \xi_j \neq 0 \quad \text{oraz} \quad |\zeta_j| \leqslant 1 \text{ dla } \xi_j = 0\}.$$

Przyjmując oznaczenie $A = \operatorname{supp} x = \{j : \xi_j \neq 0\}$ dla $y = (\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mamy:

$$
\begin{aligned}
[x, y]_s &= \sup_{z^* \in J(x)} z^*(y) = \sup_{z^* \in J(x)} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \eta_j = \sup_{z^* \in J(x)} \Big(\sum_{j \in A} \zeta_j \eta_j + \sum_{j \notin A} \zeta_j \eta_j \Big) \\
&= \sup_{z^* \in J(x)} \Big(\sum_{j \in A} \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j + \sum_{j \notin A} \zeta_j \eta_j \Big) = \sum_{j \in A} \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j + \sup_{z^* \in J(x)} \sum_{j \notin A} \zeta_j \eta_j \\
&\overset{(\diamond)}{=} \sum_{j \in A} \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j + \sum_{j \notin A} |\eta_j| = \|y\|_1 - \sum_{j \in A} \big(|\eta_j| - \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j \big).
\end{aligned}
$$

Równość $(\diamond)$ wykazujemy następująco; ponieważ $|\zeta_j| \leqslant 1$ dla $j \notin A$, więc prawdziwa jest następująca nierówność: $\zeta_j \eta_j \leqslant \eta_j \leqslant |\eta_j|$, która staje się równością, gdy przyjmiemy $\zeta_j = \operatorname{sgn} \eta_j$. Zatem $\sup_{z^* \in J(x)} \sum_{j \notin A} \zeta_j \eta_j = \sum_{j \notin A} |\eta_j|$.

Rozumując podobnie można wykazać, iż

$$
[x, y]_i = -\|y\|_1 + \sum_{j \in A} \big(|\eta_j| + \eta_j \operatorname{sgn} \xi_j \big).
$$

W szczególności $[x, y]_s = [x, y]_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{supp} y \subset \operatorname{supp} x$.

3.2 Moduły półciągłości

Niech X oznacza przestrzeń unormowaną, wyposażoną w normę $\|\cdot\|$, a $Cl(X)$ rodzinę wszystkich niepustych i domkniętych podzbiorów X. Dla dowolnych odwzorowań

$$
\begin{aligned}
A &\colon X \to \mathbb{R}, & x &\mapsto A(x), \\
H &\colon (0,1] \times X \to Cl(X), & (\delta, x) &\mapsto H(\delta, x),
\end{aligned}
$$

oraz ustalonego $\varepsilon > 0$ i $x \in X$ zdefiniujmy zbiór:

$$
\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x) = \{\delta \in (0,1] : \ \forall\, y \in X \quad y \in H(\delta, x) \Rightarrow A(y) \leqslant \varepsilon\}.
$$

Zbiór $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ może być zbiorem pustym, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 3.2. Niech odwzorowania A oraz H będą dane wzorami

$$
A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad H(\delta, x) = B_X(x, \delta).
$$

Wtedy dla każdego $\varepsilon \in (0,1)$ zbiór $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, 0) = \{\delta \in (0,1] : \ \forall\, y \in X \quad \|y\| \leqslant \delta \Rightarrow A(y) \leqslant \varepsilon\}$ jest pusty.

W przypadku, gdy $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ okazuje się niepusty, możliwe staje się określenie wielkości

$$
\Delta(A, H, \varepsilon, x) = \sup_{\delta} \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x).
$$

Niestety w ogólności $\Delta(A, H, \varepsilon, x)$ nie musi być elementem zbioru $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$.

Przykład 3.3. Niech $\varepsilon \in (0,1)$ oraz

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \|x\| \neq 1, \\ 1 & \text{dla } \|x\| = 1 \end{cases} \qquad \text{oraz} \quad H(\delta, x) = B(x, \delta).$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozważmy zbiór:

$$\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, 0) = \{\delta \in (0,1] : \ \forall\, y \in X \quad \|y\| \leqslant \delta \Rightarrow A(y) \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Oczywiście, jeżeli $\delta \in (0,1)$ to $\delta \in \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, 0)$, jednak $\Delta(A, H, \varepsilon, 0) = 1 \notin \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, 0)$.

Definicja 3.4. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy *domkniętym z góry*, gdy zawiera granicę każdego rosnącego ciągu o wyrazach z A.

Przykład 3.4. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a $L\colon X \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem ciagłym; przez K oznaczmy zwarty i wypukły podzbiór przestrzeni X. Zdefiniujmy następnie odwzorowania: $A\colon X \times X \to \mathbb{R}$ i $H\colon (0,1] \times X \times X \to Cl(X)$ wzorami

$$A(x,y) = |L(x) - L(y)| \qquad \text{dla } x, y \in X,$$

oraz

$$H(\delta, x, y) = \Big\{(u,v) \in K^2 : \|u - v\| \leqslant \delta\Big\} \qquad \text{dla } \delta > 0,\ x, y \in X.$$

Zauważmy, że $\delta \in \mathcal{M}(L, K, \varepsilon) = \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta \in (0,1]$ oraz dla wszystkich $x, y \in K$ warunek $\|x - y\| \leqslant \delta$ implikuje $|L(x) - L(y)| \leqslant \varepsilon$. Z uwagi na jednostajną ciągłość funkcji L zbiór $\mathcal{M}(L, K, \varepsilon)$ jest niepusty, więc liczba $\Delta = \Delta(L, K, \varepsilon)$ istnieje. Liczbę tę nazywamy *modułem jednostajnej ciągłości* funkcji L na zbiorze K.

Sprawdzimy, iż $\mathcal{M}(L, K, \varepsilon)$ jest domknięty z góry. Niech $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\mathcal{M}(L, K, \varepsilon)$ zbieżnym do pewnego $\delta \in (0,1]$, a $x, y \in K$ dowolnymi elementami takimi, że $\|x - y\| \leqslant \delta$. Wybierzmy dowolny ciąg $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach z przedziału $(0, \frac{1}{2})$ malejący do zera i dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy:

$$x_n = (1 - \lambda_n)x + \lambda_n y \qquad \text{oraz} \qquad y_n = (1 - \lambda_n)y + \lambda_n x.$$

Jak łatwo zauważyć wypukłość zbioru K gwarantuje, iż wszystkie wyrazy ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ należą do K. Dzięki zbieżności ciągu $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $k = k(n)$ takie, że $\|x_n - y_n\| = (1 - 2\lambda_n)\,\|x - y\| \leqslant \delta_k$, co z kolei implikuje, że $|L(x_n) - L(y_n)| \leqslant \varepsilon$. Korzystając z ciągłości funkcji L, otrzymujemy więc: $|L(x) - L(y)| \leqslant \varepsilon$. Tym samym dowiedliśmy domkniętości z góry zbioru $\mathcal{M}(L, K, \varepsilon)$. W szczególności uzyskaliśmy, że $\Delta \in \mathcal{M}(L, K, \varepsilon)$.

Przytoczona na początku niniejszego paragrafu konstrukcja ma ogólny charakter; zajmiemy się jej pewnym szczególnym przypadkiem. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a funkcje A_1, A_2, określone na przestrzeni X o wartościach rzeczywistych, niech spełniają następujące warunki:

$$A_1(x) \leqslant A_2(x) \quad \text{dla wszystkich } x \in X, \tag{3.7}$$

$$A_1(x) \quad \text{jest półciągła z dołu na } X, \tag{3.8}$$

$$A_2(x) \quad \text{jest półciągła z góry na } X. \tag{3.9}$$

Dla dowolnego $x \in X$ oraz $\delta > 0$ zdefiniujmy:

$$A(x) = A_1(x) \qquad \text{i} \qquad H(\delta, x) = B_X(x, \delta)$$

oraz oznaczmy

$$N(A_2) = \{x \in X : A_2(x) \leqslant 0\}.$$

Zbiór $N(A_2)$ będziemy nazywać *ujemną dziedziną* funkcji A_2. Okazuje się, iż dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $x \in N(A_2)$ zbiór $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ jest niepusty.

Istotnie, warunek $A_2(x) \leqslant 0 < \varepsilon$ w połączeniu z Twierdzeniem 1.4 oraz (3.9) implikuje $A_2(y) \leqslant \varepsilon$ dla $y \in B_X(x, \delta)$ przy pewnym małym $\delta > 0$. Z (3.7), wynika, że δ należy do zbioru $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$.

Udowodnimy obecnie, że dla $x \in N(A_2)$ zbiór $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ jest domknięty z góry. W tym celu niech $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym (silnie) rosnącym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ zbieżnym do pewnego $\delta \in (0, 1]$. Niech $y \in X$ spełnia $\|x - y\| \leqslant \delta$. Zdefiniujmy ciąg, którego wyraz ogólny określony jest równością:

$$y_n = \left(1 - \frac{\delta_n}{\delta}\right) x + \frac{\delta_n}{\delta} y.$$

Wtedy oczywiście y_n dąży do y, gdy $n \to +\infty$, a ponadto $\|y_n - x\| \leqslant \delta_n$. Stąd $A_1(y_n) \leqslant \varepsilon$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ funkcja A_1 jest półciągła z dołu, więc $A_1(y) \leqslant \varepsilon$. Tym samym dowiedliśmy, iż $\delta \in \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$.

Lemat 3.2. *Niech $\varepsilon > 0$, a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach zawartych w ujemnej dziedzinie funkcji A_2, tj. zbiorze $N(A_2)$, zbieżnym do pewnego $x \in N(A_2)$. Wtedy*

$$\liminf_{n\to\infty} \Delta(A, H, \varepsilon, x_n) \geqslant \Delta(A, H, \varepsilon, x),$$

innymi słowy, obcięcie $\Delta(A, H, \varepsilon, \cdot)\big|_{N(A_2)}$ jest funkcją półciągłą z dołu.

Dowód. Niech $x \in N(A_2)$ będzie ustalony. Oznaczmy dla prostoty $\Delta = \Delta(A, H, \varepsilon, x)$. Ponieważ zbiór $\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ jest domknięty z góry, więc prawdziwa jest następująca implikacja:

$$\forall\, y \in X \quad \|y - x\| \leqslant \Delta \Rightarrow A_1(y) \leqslant \varepsilon.$$

Ustalmy $\alpha \in (0, \Delta)$. Z założenia ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do elementu x, więc znajdziemy indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ taki, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ spełniony będzie warunek $\|x - x_n\| \leqslant \Delta - \alpha$. Załóżmy, że $\|y - x_n\| \leqslant \alpha$ dla $n \geqslant n_0$. Wtedy dla $n \geqslant n_0$:

$$\|y - x\| \leqslant \|y - x_n\| + \|x_n - x\| \leqslant \alpha + \Delta - \alpha = \Delta,$$

a zatem $A_1(y) \leqslant \varepsilon$. Innymi słowy $\Delta(A, H, \varepsilon, x_n) \geqslant \alpha$ dla $n \geqslant n_0$. Z dowolności α otrzymujemy tezę. □

Przykład 3.5. Rozpatrzmy parę funkcji ciągłych $F \colon \mathbb{R} \times X \to X$ oraz $L \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Niech $A_1, A_2 \colon \mathbb{R} \times X \times X \to \mathbb{R}$ będą określone wzorami:

$$\begin{aligned} A_1(t, x, y) &= \left[x - y, F(t, x) - F(t, y)\right]_i - L(t, \|x - y\|), \\ A_2(t, x, y) &= \left[x - y, F(t, x) - F(t, y)\right]_s - L(t, \|x - y\|). \end{aligned}$$

Z podpunktów g) oraz i) Twierdzenia 3.3 wynika, iż warunki (3.7), (3.8) jak również (3.9) są spełnione. A więc, dla każdej trójki $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times X \times X$ takiej, że:

$$\left[x - y, F(t, x) - F(t, y)\right]_s \leqslant L(t, \|x - y\|)$$

oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór $\mathcal{M}(F, L, \varepsilon, t, x, y) = \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, t, x, y)$ jest niepusty. Ponieważ jest on także domknięty z góry, więc supremum $\Delta = \Delta(F, L, \varepsilon, t, x, y)$ należy do zbioru $\mathcal{M}(F, L, \varepsilon, t, x, y)$, tj.

$$\forall\ (r, u, v) \in \mathbb{R} \times X \times X \quad \max\{|t - r|, \|x - u\|, \|y - v\|\} \leqslant \Delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ [u - v, F(r, u) - F(r, v)]_i \leqslant L(r, \|u - v\|) + \varepsilon$$

Ponadto, na mocy Lematu 3.2, odwzorowanie $(t, x, y) \mapsto \Delta(F, L, \varepsilon, t, x, y)$ obcięte do zbioru $N(A_2)$ jest półciągłe z dołu.

Przykład 3.6. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ oraz $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi, a $F\colon X \to Y$ funkcją ciągłą. Funkcje $A_1, A_2\colon X \times X \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy wzorem:

$$A_1(x, y) = A_2(x, y) = \|F(x) - F(y)\|_Y .$$

Na podstawie wcześniejszych rozważań, dla dowolnego $x \in X$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór $\mathcal{M}(F, \varepsilon, x) = \mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x, x)$ jest niepusty oraz domknięty z góry, zatem $\Delta(F, \varepsilon, x) \in \mathcal{M}(F, \varepsilon, x)$. Liczbę $\Delta(F, \varepsilon, x)$ nazywamy *modułem ciągłości* funkcji F w punkcie x. Ponadto odwozorowanie $x \mapsto \Delta(F, \varepsilon, x)$ jest półciągłe z dołu na przestrzeni X (por. Lem 3.2).

Uwaga 3.1. Jeżeli w zaprezentowanej konstrukcji funckję $H(\delta, x)$ zastąpimy funkcją:

$$\tilde{H}(\delta, x) = D \cap B_X(x, \delta),$$

gdzie zbiór D jest domkniętym podzbiorem przestrzeni unormowanej X, to dla dowolnego $x \in D \cap N(A_2)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, odpowiednie zbiory $\tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, x)$ będą niepuste; jednakże, jak pokazuje poniższy przykład, w ogólności nie możemy oczekiwać ich domkniętości z góry.

Przykład 3.7. Rozpatrzmy przestrzeń $X = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową. Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a = (0, 0)$, $b = (0, -4)$, $c = (-3\sqrt{7}/16, -1/16)$ i przyjmijmy

$$D = \operatorname{conv}\{a, b\} \cup \operatorname{conv}\{b, c\}.$$

Niech ponadto

$$\tilde{H}(\delta, (x, y)) = B_{\mathbb{R}^2}((x, y), \delta) \cap D$$

oraz

$$A_1(x, y) = A_2(x, y) = \begin{cases} \|(x, y)\| & \text{dla } x \in [0, +\infty), \\ (1 + \frac{x}{x_c})\,\|(x, y)\| & \text{dla } x \in [x_c, 0), \\ 2\,\|(x, y)\| & \text{dla } x \in (-\infty, x_c), \end{cases}$$

gdzie x_c oznacza odciętą punktu c. Oczywiście funkcje A_1, A_2 są ciągłe, a więc spełniają warunki (3.7), (3.8) oraz (3.9). Ponieważ $A_2(a) = 0$ i $a \in D$, więc zbiór $\tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$ jest niepusty dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Ustalmy $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pokażemy, że odcinek $(0, \frac{1}{2}) \subset \tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$, lecz $\frac{1}{2} \notin \tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$, więc zbiór $\tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$ nie będzie domknięty z góry.

Niech $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Jak łatwo zauważyć, odległość punktu a od prostej zawierającej odcinek $\operatorname{conv}\{b, c\}$ wynosi $\frac{1}{2}$ i jest osiągana w punkcie c. Jeśli zatem $\|(x, y)\| \leqslant \delta$ i $(x, y) \in D$, to $(x, y) \in \operatorname{conv}\{a, b\}$. Stąd $A_1(x, y) = \|(x, y)\| \leqslant \delta < \varepsilon$, czyli $\delta \in \tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$. Tym samym pokazaliśmy, że $(0, \frac{1}{2}) \subset \tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$.

Jeśli jednak weźmiemy punkt c, który oczywiście należy do zbioru $\tilde{H}(\frac{1}{2}, a)$, to otrzymamy: $A_1(c) = 2\,\|c\| = 1 \not< \varepsilon$, a zatem $\frac{1}{2} \notin \tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, a)$.

Uwaga 3.2. Warto zauważyć, iż nawet gwiaździstość zbioru D nie gwarantuje domkniętości z góry $\tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, x)$. Jednakże, jeśli jako zbiór D weźmiemy zbiór wypukły, to powtarzając rozumowanie ze strony 26, można wykazać, iż dla dowolnego $x \in D \cap N(A_2)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiory $\tilde{\mathcal{M}}(A, \tilde{H}, \varepsilon, x)$ są domknięte z góry.

Uwagi

Definicja 3.1 pochodzi z [30]. Odnotujmy, iż w [6] Deimling wprowadza iloczyny półskalarne związane z funkcją $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$, a nie jak w [30] oraz niniejszej pracy, z funkcją $x \mapsto \|x\|$. Twierdzenie 3.2 oraz Twierdzenie 3.3 (a)–(h) są modyfikacjami oraz uzupełnieniami odpowiednich twierdzeń z [6]. Podpunkty (i)–(k) oraz dowód dostateczności podpunktu (i) zaczerpnięte zostały z [30]. Przykład 3.1 jest modyfikacją przykładu z [6]. Dowód Lematu 3.1 wzorowany jest na dowodzie analogicznego faktu, który można znaleźć w [3].

Wszystkie fakty dotyczące modułów półciągłości zawarte w Paragrafie 3.2, oprócz Przykładu 3.2, Przykładu 3.3 oraz Przykładu 3.7, pochodzą z [30]. Wspomniane przykłady są wkładem Autora niniejszej pracy.

Rozdział 4

Nierówności różniczkowe

Niniejszy rozdział poświęcony będzie wykazaniu dwóch faktów dotyczących nierówności różniczkowych dla funkcji o wartościach rzeczywistych, które w dalszej części pracy będą odgrywały kluczową rolę w dowodach głównych twierdzeń. Twierdzenie 4.2 wykorzystamy w Rozdziale 6, natomiast jego modyfikację – Twierdzenie 4.3 – w Rozdziale 7.

* * *

Niech I oznacza obustronnie otwarty przedział na prostej rzeczywistej, tj. $I = (a, b)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, a t_0 ustalony punkt pośredni przedziału I. Dla funkcji ciągłej $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz ustalonego $\gamma > 0$ rozważmy następujące zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \varphi'(t) &= L(t, \varphi(t)) + \gamma, \\ \varphi(t_0) &= \gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Na podstawie Twierdzenia 1.13 oraz Twierdzenia Peano (Tw. 2.1) powyższe zagadnienie posiada prawostronne rozwiązanie maksymalne określone na przedziale $[t_0, t_\gamma)$, gdzie $t_0 < t_\gamma \leqslant b$, które oznaczać będziemy przez $\varphi_\gamma(t)$.

Definicja 4.1. Niech $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Funkcję ciągłą $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy:

a) *normalną* na przedziale I, jeśli $L(t, 0) = 0$ dla wszystkich $t \in I$;

b) *silnie normalną* na przedziale I, jeśli dla każdego $t_0 \in I$ prawostronnym rozwiązaniem maksymalnym zagadnienia $(4.1)_{(t_0,0)}$ jest funkcja $\varphi_0(t) \equiv 0$.

Uwaga 4.1. Każda funkcja $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ silnie normalna na przedziale I jest również normalna na tym przedziale. Istotnie, niech t należące do przedziału I będzie wybrane dowolnie. Wtedy na podstawie Definicji 4.1 b) rozwiązaniem maksymalnym zagadnienia Cauchy'ego $(4.1)_{(t,0)}$, określonym w prawostronnym otoczeniu punktu t, jest funkcja $\varphi_0 \equiv 0$. W szczególności

$$0 = \varphi_0'(t) = L(t, \varphi_0(t)) = L(t, 0).$$

Z dowolności t wynika, iż funkcja L jest normalna na przedziale I.

Przykład 4.1. Nie każda funkcja normalna jest silnie normalna. W celu wykazania powyższego stwierdzenia, wystarczy rozpatrzyć funkcję $L\colon (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $L(t, x) = 2\sqrt{x}$

dla $x \geqslant 0$ oraz $L(t,x) = -2\sqrt{-x}$ dla $x < 0$. Istotnie, funkcja $x\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $x(t) = t^2$ jest rozwiązaniem zagadnienia $(4.1)_{(0,0)}$. Jednakże

$$0 < x\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \overline{x}\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

gdzie $\overline{x}$ oznacza rozwiązanie maksymalne zagadnienia $(4.1)_{(0,0)}$, określone w pewnym prawostronnym otoczeniu zera, co przeczy silnej normalności funkcji L na przedziale $(-1,1)$.

Twierdzenie 4.1. *Niech $I = (a,b)$ będzie przedziałem otwartym na prostej rzeczywistej i niech funkcja ciągła $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie silnie normalna na I. Wtedy dla każdego $\eta > 0$ oraz każdego $T_0 \in (t_0, t_\gamma)$ istnieje $\nu(\eta) \in (0,\gamma)$, dla którego $0 \leqslant \varphi_\nu(t) \leqslant \eta$, o ile tylko $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$ oraz $0 < \nu < \nu(\eta)$.*

Dowód. Ponieważ na mocy Uwagi 4.1 funkcja $L(t,x)$ jest normalna, stwierdzamy, iż $\varphi_0(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem globalnym zagadnienia $(4.1)_{(t_0,0)}$. Zatem na podstawie Twierdzenia 1.14

$$0 = \varphi_0(t) \leqslant \varphi_\gamma(t) \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t < t_\gamma.$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami dla dowolnego $\xi \in (0,\gamma]$ przez $\varphi_\xi(t)$ będziemy rozumieć prawostronne rozwiązanie maksymalne zagadnienia Cauchy'ego $(4.1)_{(t_0,\xi)}$, określone na przedziale $[t_0, t_\xi)$. Na mocy Twierdzenia 1.14 oraz Twierdzenia 1.15, dla $U(t,u) = L(t,u) + \gamma$ oraz $V(t,u) = L(t,u) + \xi$, otrzymujemy

$$\varphi_0(t) \leqslant \varphi_\xi(t) \leqslant \varphi_\gamma(t) \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t < \min\{t_\gamma, t_\xi\}. \tag{4.2}$$

Przypuśćmy, że $t_\xi < t_\gamma$, Ponieważ na podstawie Lematu 1.2 funkcja $\varphi_\xi(t)$ dąży do brzegu obszaru określoności, gdy t dąży do $t_\xi < b$, więc $\varphi_\xi(t) \to +\infty$ dla $t \to t_\xi^-$. Biorąc pod uwagę, iż $[t_0, t_\xi) \subsetneq [t_0, t_\gamma)$ oraz fakt, że φ_γ jest ciągła i ograniczona na przedziale $[t_0, t_\xi)$, otrzymujemy

$$\varphi_\gamma(t) \to \varphi_\gamma(t_\xi) < +\infty \qquad \text{dla } t \to t_\xi. \tag{4.3}$$

Z drugiej strony, przechodząc granicznie w nierówności (4.2) przy $t \to t_\xi$ dostaniemy

$$\lim_{t \to t_\xi^-} \varphi_\gamma(t) = +\infty.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $t_\xi \geqslant t_\gamma$, o ile tylko $\gamma \geqslant \xi$.

Powtarzając powyższe rozumowanie dla liczb ξ i η w miejsce ξ i γ, mamy

$$0 \leqslant \varphi_\xi(t) \leqslant \varphi_\eta(t) \leqslant \varphi_\gamma(t) \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t < t_\gamma \text{ i } 0 < \xi \leqslant \eta \leqslant \gamma. \tag{4.4}$$

Otrzymujemy zatem posiadającą własność (4.4) rodzinę $\mathcal{A} = \{\varphi_\xi : 0 < \xi \leqslant \gamma\}$ rozwiązań maksymalnych zagadnień $(4.1)_{(t_0,\xi)}$ $(0 < \xi \leqslant \gamma)$, określonych na wspólnym przedziale istnienia $[t_0, t_\gamma)$. Możemy więc zdefiniować funkcję $\varphi_0^*\colon [t_0, t_\gamma) \to [0, +\infty)$ określoną wzorem

$$\varphi_0^*(t) = \lim_{\xi \to 0^+} \varphi_\xi(t) = \inf_{\xi \in (0,\gamma]} \varphi_\xi(t).$$

Pokażemy obecnie, iż rodzina $\mathcal{A}$ jest jednakowo ciągła w każdym punkcie przedziału $[t_0, t_\gamma)$, co w konsekwencji dowiedzie ciągłości funkcji $\varphi_0^*(t)$ (por. Def. 1.8).

Wybierzmy więc dowolne $x_0 \in [t_0, t_\gamma)$ oraz $\varepsilon > 0$. Znajdziemy wtedy domknięte otoczenie punktu x_0 postaci

$$\begin{aligned} [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma] \subset [t_0, t_\gamma) \qquad & \text{w przypadku, gdy } x_0 \neq t_0, \\ [x_0, x_0 + \sigma] \subset [t_0, t_\gamma) \qquad & \text{w przypadku, gdy } x_0 = t_0, \end{aligned}$$

które będziemy oznaczać $O(x_0)$.

Dla przejrzystości rozważań wprowadźmy jeszcze dwa oznaczenia. Niech

$$A = O(x_0) \times \big[0, \sup_{t \in O(x_0)} \varphi_\gamma(t)\big] \quad \text{i} \quad M = \gamma + \sup_{(t,s)\in A} \big|L(t,s)\big|.$$

Dla dowolnego $t \in O(x_0)$ oraz $\xi \in (0, \gamma]$ mamy

$$\big|\varphi_\xi(t) - \varphi_\xi(x_0)\big| = \big|\varphi_\xi'(\theta_{tx_0})\big|\big|t - x_0\big| \leqslant M\big|t - x_0\big|,$$

gdyż

$$\begin{aligned} \big|\varphi_\xi'(\theta_{tx_0})\big| &\leqslant \sup_{(t,\kappa)\in O(x_0)\times(0,\gamma]} \big|\varphi_\kappa'(t)\big| = \sup_{(t,\kappa)\in O(x_0)\times(0,\gamma]} \big|L\big(t, \varphi_\kappa(t)\big) + \xi\big| \\ &\leqslant \gamma + \sup_{(t,x)\in A} \big|L(t,x)\big| = M. \end{aligned}$$

Obierając $\delta = \min\{\sigma, \frac{\varepsilon}{M}\}$ spełniamy warunek w definicji jednakowej ciągłości w punkcie x_0. Ponieważ dla każdego $x_0 \in [t_0, t_\gamma)$ wartość $\varphi_0^*(x_0)$ jest skończona, jako zmajoryzowana przez $\varphi_\gamma(x_0)$, zatem na mocy Twierdzenia 1.5, funkcja $\varphi_0^*(t)$ jest ciągła na przedziale $[t_0, t_\gamma)$. Na podstawie Twierdzenia Diniego (Tw. 1.6) stwierdzamy, iż $\varphi_\xi \rightrightarrows \varphi_0^*$, gdy $\xi \to 0^+$, na każdym przedziale zwartym zawartym w $[t_0, t_\gamma)$. (Symbol $\rightrightarrows$ oznacza jednostajną zbieżność.)

Zauważmy, że dla dowolnego $\xi \in (0, \gamma]$ oraz dowolnego $t \in [t_0, t_\gamma)$ mamy

$$\varphi_\xi(t) = \xi + \int_{t_0}^t \Big[L\big(s, \varphi_\xi(s)\big) + \xi\Big] ds,$$

a zatem dla każdego $t \in [t_0, t_\gamma)$

$$\varphi_0^*(t) = \int_{t_0}^t L\big(s, \varphi_0^*(s)\big) ds.$$

Istotnie, obierając $t \in [t_0, t_\gamma)$, ponieważ

$$\begin{aligned} \Big|\varphi_\xi(t) - \int_{t_0}^t L\big(s, \varphi_0^*(s)\big) ds\Big| &= \Big|\xi(t - t_0 + 1) + \int_{t_0}^t \Big[L\big(s, \varphi_\xi(s)\big) - L\big(s, \varphi_0^*(s)\big)\Big] ds\Big| \\ &\leqslant \big|\xi(t - t_0 + 1)\big| + \int_{t_0}^t \Big|L\big(s, \varphi_\xi(s)\big) - L\big(s, \varphi_0^*(s)\big)\Big| ds, \end{aligned}$$

więc z uwagi na warunek

$$\Big|L\big(s, \varphi_\xi(s)\big) - L\big(s, \varphi_0^*(s)\big)\Big| \rightrightarrows 0 \quad \text{wraz z } \xi \to 0^+ \text{ na } [t_0, t],$$

otrzymujemy

$$\varphi_0^*(t) = \int_{t_0}^t L\big(s, \varphi_0^*(s)\big) ds.$$

Stąd $\varphi_0^*(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia $(4.1)_{(t_0,0)}$ na przedziale $[t_0, t_\gamma)$. Ponieważ $\varphi_0^*(t)$ przyjmuje wartości nieujemne, to z silnej normalności funkcji L na przedziale I wnosimy, że $\varphi_0^*(t) \equiv 0$.

Reasumując dowiedliśmy, iż dla dowolnego $\eta > 0$ i $T_0 \in (t_0, t_\gamma)$ istnieje $\nu(\eta) \in (0, \gamma)$ takie, że

$$\sup_{\nu \in (0,\nu(\eta))} \sup_{t \in [t_0, T_0]} \varphi_\nu(t) < \eta.$$

Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Twierdzenie 4.2. *Niech $I = (a, b)$ będzie przedziałem otwartym na prostej rzeczywistej, natomiast $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą. Niech $T_0 \in [t_0, t_\gamma)$ oraz $\mu \in (0, \gamma)$. Załóżmy, że lokalnie lipschitzowska funkcja $\varphi\colon [t_0, T_0) \to [0, +\infty)$ spełnia warunki:*

a) $\varphi(t_0) \leqslant \mu$;

b) $\Lambda^- \varphi(t) \leqslant L\big(t, \varphi(t)\big) + \mu$ *dla prawie wszystkich* $t \in (t_0, T_0)$.

Wtedy $\varphi(t) \leqslant \varphi_\nu(t)$ *dla wszystkich* $\nu \in (\mu, \gamma)$ *oraz* $t \in [t_0, T_0)$.

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że dla pewnego $\nu \in (\mu, \gamma)$ oraz $t^* \in (t_0, T_0)$ zachodzi nierówność $\varphi(t^*) > \varphi_\nu(t^*)$. Przez A oznaczmy zbiór miary zero (w sensie Lebesgue'a), o którym mowa w punkcie b) i wybierzmy liczbę β o własnościach:

$$0 < \beta < \varphi(t^*) - \varphi_\nu(t^*) \quad \text{oraz} \quad \beta \notin (\varphi - \varphi_\nu)(A). \tag{4.5}$$

Jest to możliwe z uwagi na fakt, iż funkcja φ_ν, a zatem także $\varphi - \varphi_\nu$ jest lokalnie lipschitzowska i w związku z tym (por. Tw. 1.2) zbiór $(\varphi - \varphi_\nu)(A)$ jest miary zero. Nie może więc zawierać niepustego przedziału $\big(0, (\varphi - \varphi_\nu)(t^*)\big) \subset \mathbb{R}$. Oznaczmy

$$r_\beta = \inf\left\{t \in (t_0, T_0) : \varphi(t) > \varphi_\nu(t) + \beta\right\}.$$

Wykażemy, że $r_\beta \in (t_0, T_0)$ i $r_\beta \notin A$. Przypuśćmy, że $r_\beta = t_0$. Wtedy z ciągłości funkcji $\varphi - \varphi_\nu$ oraz definicji infimum otrzymujemy $\mu \geqslant \varphi(t_0) \geqslant \varphi_\nu(t_0) + \beta = \nu + \beta > \mu + \beta$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $r_\beta \neq t_0$. Ponadto (raz jeszcze korzystając z ciągłości funkcji $\varphi - \varphi_\nu$ oraz definicji infimum)

$$\varphi(r_\beta) = \varphi_\nu(r_\beta) + \beta. \tag{4.6}$$

Gdyby $r_\beta \in A$, to $\varphi(r_\beta) - \varphi_\nu(r_\beta) = \beta \in (\varphi - \varphi_\nu)(A)$, ale przecież liczba β została tak wybrana, by nie należała do zbioru $(\varphi - \varphi_\nu)(A)$. Dowodzi to faktu, iż $r_\beta \notin A$.

Zauważmy, iż dla $t_0 \leqslant t < r_\beta$ mamy

$$\varphi(t) < \varphi_\nu(t) + \beta,$$

co w połączeniu z (4.6) prowadzi do związku

$$\varphi(t) - \varphi(r_\beta) < \varphi_\nu(t) - \varphi_\nu(r_\beta) \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t < r_\beta,$$

a zatem

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(r_\beta)}{t - r_\beta} > \frac{\varphi_\nu(t) - \varphi_\nu(r_\beta)}{t - r_\beta} \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t < r_\beta.$$

Przechodząc granicznie z $t \to r_\beta^-$ otrzymujemy

$$\Lambda^-\varphi(r_\beta) \geqslant \Lambda^-\varphi_\nu(r_\beta).$$

Stąd

$$L(r_\beta, \varphi(r_\beta)) + \mu \geqslant \Lambda^-\varphi(r_\beta) \geqslant \Lambda^-\varphi_\nu(r_\beta) = \varphi_\nu'(r_\beta) = L(r_\beta, \varphi_\nu(r_\beta)) + \nu,$$

więc

$$L(r_\beta, \varphi(r_\beta)) \geqslant L(r_\beta, \varphi_\nu(r_\beta)) + \nu - \mu.$$

Obierzmy ściśle malejący zbieżny do zera ciąg $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb spełniających (4.5) oraz odpowiadający mu ciąg $(r_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Zauważmy, że funkcja $\beta \mapsto r_\beta$ jest rosnąca, gdyż dla $\beta_1 \geqslant \beta_2$ mamy

$$\varphi(t) > \varphi_\nu(t) + \beta_1 \geqslant \varphi_\nu(t) + \beta_2.$$

Zatem ciąg $(r_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$, którego wyrazy należą do przedziału (t_0, T_0), jest malejący i jako ograniczony z dołu jest zbieżny do pewnego $r \in [t_0, T_0)$. Na podstawie pierwszej części dowodu, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\varphi(r_{\beta_n}) = \varphi_\nu(r_{\beta_n}) + \beta_n \quad \text{oraz} \quad L(r_{\beta_n}, \varphi(r_{\beta_n})) \geqslant L(r_{\beta_n}, \varphi_\nu(r_{\beta_n})) + \nu - \mu.$$

Przechodząc w tych związkach z $n \to +\infty$ otrzymujemy

$$\varphi(r) = \varphi_\nu(r) \quad \text{oraz} \quad L(r, \varphi(r)) \geqslant L(r, \varphi_\nu(r)) + \nu - \mu,$$

a więc $\mu \geqslant \nu$. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości tezy. □

Jeżeli w powyższym twierdzeniu zamiast rozwiązań maksymalnych zagadnienia początkowego (4.1), rozważalibyśmy rozwiązania maksymalne zagadnienia:

$$\varphi'(t) = L(t, \varphi(t)), \qquad \varphi(t_0) = \gamma,$$

to jak pokazuje następujący przykład, Twierdzenie 4.2 nie zachodziłoby.

Przykład 4.2. Niech $I = (-1, 2)$, $t_0 = 0$ i $\gamma = 1$. Zdefiniujmy $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako $L(t, x) = x$ i rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\varphi'(t) = \varphi(t), \qquad \varphi(0) = \gamma. \tag{4.7}$$

Wtedy dla dowolnego $\nu \in (0, 1]$, rozwiązaniem maksymalnym zagadnienia $(4.7)_{(0,\nu)}$ jest funkcja $\varphi_\nu(t) = \nu e^t$, a przedział $[t_0, t_1)$ pokrywa się z przedziałem $[0, 2)$. Obierzmy $T_0 = 1$ oraz $\mu = \frac{1}{2}$ i zdefiniujmy $\varphi\colon [0, 1) \to [0, +\infty)$ wzorem $\varphi(t) = t + \frac{1}{2}$. Jak łatwo zauważyć

$$\varphi(0) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \Lambda^-\varphi(t) = 1 \leqslant L(t, \varphi(t)) + \frac{1}{2} \ \text{ dla } t \in [0, 1).$$

Ale dla $\nu = \dfrac{51}{100}$ istnieje $t^* \in (0, 1)$ takie, że $\varphi(t^*) > \varphi_\nu(t^*)$, gdyż

$$\varphi(0) - \varphi_\nu(0) = \frac{1}{2} - \frac{51}{100} < 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi(1) - \varphi_\nu(1) = \frac{3}{2} - \frac{51}{100}e > \frac{3}{2} - \frac{51}{100} \cdot \frac{272}{100} = \frac{141}{1250} > 0.$$

Zanim przystąpimy do sformułowania następnego twierdzenia, będącego pewnym uogólnieniem poprzedniego wyniku, poczynimy kilka wstępnych uwag.

Niech $T_0 \in [t_0, t_\gamma)$. Rozpatrzmy zbiór B postaci

$$B = \{s_k \in [t_0, T_0) : k \in \mathbb{N}_0,\ s_0 = t_0,\ s_i < s_j \text{ dla } i < j \text{ oraz } s_k \to T_0 \text{ gdy } k \to +\infty\}.$$

Jeżeli funkcja $\varphi\colon [t_0, T_0) \to [0, +\infty)$ spełnia warunek Lipschitza na każdym przedziale $[s_k, s_{k+1})$ (dla $k \in \mathbb{N}_0$), to dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieje granica:

$$\varphi(s_{k+1} - 0) = \lim_{t \to s_{k+1}^-} \varphi(t).$$

Istotnie, niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach ze zbioru $[s_k, s_{k+1})$ ($k \in \mathbb{N}_0$) zbieżnym do s_{k+1}. Wtedy korzystając z lipschitzowskości (ze stałą L_k) funkcji φ na przedziale $[s_k, s_{k+1})$, otrzymujemy

$$\bigl|\varphi(t_n) - \varphi(t_m)\bigr| \leqslant L_k |t_n - t_m| \qquad \text{dla } n, m \in \mathbb{N}, \tag{4.8}$$

a zatem ciąg $\bigl(\varphi(t_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Jest więc zbieżny w $\mathbb{R}$. Z (4.8) wynika również, że dla dwóch ciągów $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do przedziału $[s_k, s_{k+1})$ zbieżnych do s_{k+1}, ciągi $\bigl(\varphi(t_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\bigl(\varphi(\tau_n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do wspólnej granicy. Dowodzi to istnienia granicy $\varphi(s_{k+1} - 0)$ dla $k \in \mathbb{N}_0$. W związku z tym dla $k \in \mathbb{N}_0$ istnieje również granica

$$\Omega^-\varphi(s_{k+1}) = \limsup_{t \to s_{k+1}^-} \bigl[\varphi(t) - \varphi(s_{k+1})\bigr] = \varphi(s_{k+1} - 0) - \varphi(s_{k+1}).$$

Dla prostoty zapisu Twierdzenia 4.3 oznaczmy

$$\alpha = \sup_{t_0 \leqslant t < T_0} \varphi(t), \qquad c(\varepsilon) = \Delta(L, [t_0, T_0] \times [0, 2\alpha], \varepsilon), \qquad \sigma = \tfrac{1}{2} \min\left\{\mu, \alpha, c\left(\tfrac{\mu}{2}\right)\right\},$$

przy czym należy nadmienić, iż symbole te nabiorą znaczenia dopiero poniżej.

Twierdzenie 4.3. *Niech dany będzie zbiór B postaci:*

$$B = \{s_k \in [t_0, T_0) : k \in \mathbb{N}_0,\ s_0 = t_0,\ s_i < s_j \ \textit{dla}\ i < j \ \textit{oraz}\ s_k \to T_0 \ \textit{gdy}\ k \to +\infty\}.$$

Niech $I = (a, b)$ będzie przedziałem otwartym na prostej rzeczywistej, a $L\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odwzorowaniem ciągłym. Ustalmy $T_0 \in [t_0, t_\gamma)$ oraz $\mu \in (0, \gamma)$ i załóżmy, że funkcja $\varphi\colon [t_0, T_0) \to [0, +\infty)$ spełnia warunki:

a) *φ jest ograniczona na $[t_0, T_0)$;*

b) *φ jest lipschitzowska na każdym przedziale $[s_k, s_{k+1})$ dla $k \in \mathbb{N}_0$;*

c) *$\varphi(t_0) \leqslant \sigma$;*

d) *$\Lambda^-\varphi(t) \leqslant L\bigl(t, \varphi(t)\bigr) + \sigma$ dla prawie wszystkich $t \in (t_0, T_0)$;*

e) *$\rho = \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl|\Omega^-\varphi(s_k)\bigr| = \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl|\varphi(s_k - 0) - \varphi(s_k)\bigr| \leqslant \sigma$.*

Wtedy $\varphi(t) \leqslant \varphi_\nu(t)$ dla wszystkich $\nu \in (\mu, \gamma)$ oraz $t_0 \leqslant t < T_0$.

Dowód. Ponieważ φ jest ograniczona na przedziale $[t_0, T_0)$, więc $\alpha < +\infty$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż $\alpha > 0$.

Zdefiniujmy funkcję $\psi\colon [t_0, T_0) \to [0, +\infty)$ wzorem:

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t) + \rho & \text{dla } t_0 = s_0 \leqslant t < s_1, \\ \varphi(t) + \rho + \Omega^-\varphi(s_1) & \text{dla } s_1 \leqslant t < s_2, \\ \varphi(t) + \rho + \Omega^-\varphi(s_1) + \Omega^-\varphi(s_2) & \text{dla } s_2 \leqslant t < s_3, \\ \dots & \\ \varphi(t) + \rho + \sum_{k=1}^{n} \Omega^-\varphi(s_k) & \text{dla } s_n \leqslant t < s_{n+1}, \\ \dots & \end{cases}$$

Naszym celem będzie pokazanie, że funkcja $\psi(t)$ spełnia założenia Twierdzenia 4.2. Na początek zauważmy, iż funkcja $\psi(t)$ jest ciągła na przedziale swojego istnienia. Ponieważ wewnątrz każdego przedziału (s_k, s_{k+1}) ciągłość $\psi(t)$ wynika z ciągłości $\varphi(t)$, wystarczy zatem sprawdzić ciągłość na krańcach przedziałów. Ciągłosc w punkcie $s_0 = t_0$ jest oczywista. Ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{t \to s_{k+1}^-} \psi(t) &= \lim_{t \to s_{k+1}^-} \Big[\varphi(t) + \rho + \sum_{i=1}^{k} \Omega^-\varphi(s_i)\Big] = \varphi(s_{k+1} - 0) + \rho + \sum_{i=1}^{k} \Omega^-\varphi(s_i) \\ &= \rho + \varphi(s_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k+1} \Omega^-\varphi(s_i) = \psi(s_{k+1}), \end{aligned}$$

więc ψ jest ciągła w punkcie s_{k+1} dla $k \in \mathbb{N}_0$. (W przypadku, gdy $k = 0$ przyjmujemy, że $\sum_{i=1}^{0} \Omega^-\varphi(s_i) = 0$.) Tym samym funkcja ψ jest ciągła na przedziale określoności. Pokażemy, że $\psi(t)$ jest lokalnie lipschitzowska na przedziale $[t_0, T_0)$ (por. Def. 1.7). Przez L_k oznaczmy stałą Lipschitza dla funkcji φ na przedziale $[s_k, s_{k+1})$ dla $k \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ dla $x, y \in [s_k, s_{k+1})$ mamy

$$\big|\psi(x) - \psi(y)\big| = \Big|\varphi(x) + \rho + \sum_{i=1}^{k} \Omega^-\varphi(s_i) - \varphi(y) - \rho - \sum_{i=1}^{k} \Omega^-\varphi(s_i)\Big| = \big|\varphi(x) - \varphi(y)\big| \leqslant L_k|x - y|,$$

więc ψ, jako funkcja ciągła, spełnia warunek Lipschitza na każdym z przedziałów domkniętych $[s_k, s_{k+1}]$ dla $k \in \mathbb{N}_0$ (z odpowiednią stałą L_k).

Jeżeli $y_0 \in [t_0, T_0)$, to $y_0 \in [s_k, s_{k+1})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$. Jeśli $y_0 \in (s_k, s_{k+1})$ lub $y_0 = s_0$, to funkcja ψ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L_k lub L_0, odpowiednio, na pewnym otoczeniu punktu y_0. Jeśli natomiast $y_0 = s_k$ oraz $y_0 \neq s_0$, to znaczy $k \geqslant 1$, wówczas połóżmy $r_0 = \frac{1}{2}\min\{s_{k+1} - s_k, s_k - s_{k-1}\}$ oraz $L = L_{k-1} + L_k$. Dla $x, y \in B_{\mathbb{R}}(y_0, r_0)$ można wyróżnić trzy przypadki (dla $k \geqslant 1$):

(i) $x, y \in [s_{k-1}, s_k)$;

(ii) $x, y \in [s_k, s_{k+1})$;

(iii) $x \in [s_{k-1}, s_k)$, a $y \in [s_k, s_{k+1})$.

Zajmiemy się jedynie przypadkiem (iii), gdyż w dwóch pierwszych należy rozumować analogicznie jak powyżej. A więc dla $x \in [s_{k-1}, s_k)$ oraz $y \in [s_k, s_{k+1})$ mamy:

$$\big|\psi(x) - \psi(y)\big| \leqslant \big|\psi(x) - \psi(s_k)\big| + \big|\psi(s_k) - \psi(y)\big| \leqslant L_{k-1}(s_k - x) + L_k(y - s_k) \leqslant L|x - y|.$$

Pokazaliśmy tym samym, iż funkcja ψ jest lokalnie lipschitzowska na przedziale $[t_0, T_0)$.

Na podstawie założeń oraz definicji funkcji ψ otrzymujemy:

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \varphi(t) + 2\rho \leqslant \varphi(t) + 2\sigma \quad \text{dla } t_0 \leqslant t < T_0 \tag{4.9}$$

oraz

$$\psi(t_0) = \varphi(t_0) + \rho \leqslant 2\sigma \leqslant \mu.$$

Stąd z (4.9) oraz definicji liczby σ dla $t \in [t_0, T_0)$ mamy

$$\varphi(t),\ \ \psi(t) \in [0, 2\alpha]$$

oraz

$$\big|\varphi(t) - \psi(t)\big| \leqslant 2\sigma \leqslant c\left(\frac{\mu}{2}\right).$$

A zatem, z uwagi na Przykład 3.4 dla dowlonego $t \in [t_0, T_0)$ będzie:

$$\big|L\big(t, \psi(t)\big) - L\big(t, \varphi(t)\big)\big| \leqslant \frac{1}{2}\mu,$$

co w połączeniu z faktem, iż dla $t \neq s_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

$$\Lambda^-\psi(t) = \limsup_{s \to t^-} \frac{\psi(s) - \psi(t)}{s - t} = \limsup_{s \to t^-} \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} = \Lambda^-\varphi(t),$$

prowadzi do następującej nierówności:

$$\Lambda^-\psi(t) = \Lambda^-\varphi(t) \leqslant L\big(t, \varphi(t)\big) + \sigma \leqslant L\big(t, \psi(t)\big) + \sigma + \frac{1}{2}\mu \leqslant L\big(t, \psi(t)\big) + \mu.$$

Tym samym założenia Twierdzenia 4.2 dla funkcji $\psi(t)$ są spełnione, więc dla każdego $\nu \in (\mu, \gamma)$ oraz $t_0 \leqslant t < T_0$ mamy $\varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \varphi_\nu(t)$. □

Uwagi

Definicja 4.1, a także Twierdzenia 4.1–4.3 pochodzą z [30]. Dowody Twierdzeń 4.1 i 4.2 zaprezentowane w niniejszej pracy są jednakże nieco zmodyfikowane z uwagi na drobne błędy w [30]. Mianowicie, w miejsce zagadnienia (4.1), rozważane jest zagadnienie postaci

$$\varphi'(t) = L\big(t, \varphi(t)\big), \qquad\qquad \varphi(t_0) = \gamma.$$

Wtedy jednak teza Twierdzenia 4.2 nie zachodzi (por. Prz. 4.2).

Rozdział 5

Rozwiązania przybliżone

Niech X będzie przestrzenią Banacha, D niepustym podzbiorem X, natomiast $(t_0^1, t_0^2) \subset \mathbb{R}$ niepustym przedziałem otwartym; dopuszczamy także możliwość $t_0^1 = -\infty$ oraz $t_0^2 = +\infty$. Niniejszy rozdział w całości poświęcony będzie rozważaniom związanym z przybliżonymi rozwiązaniami zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie $f\colon (t_0^1, t_0^2) \times D \to X$ jest funkcją ciągłą, $t_0 \in (t_0^1, t_0^2)$, a $x_0 \in D$. (Począwszy od tego miejsca, symbole t_0 oraz x_0 będą występować zawsze tylko w znaczeniu, w którym występują w powyższym zagadnieniu początkowym.) Zanim jednak przystąpimy do konstrukcji rozwiązań przybliżonych (Paragraf 5.2) zajmiemy się tzw. zasadą maksymalności.

5.1 Zasada maksymalności

Niech P będzie zbiorem, w którym wprowadzono relację częściowego porządku $\preccurlyeq$, tzn. dla dowolnych $p, w, r \in P$ spełnione są warunki:

(i) $p \preccurlyeq p$;

(ii) jeśli $p \preccurlyeq q$ oraz $q \preccurlyeq r$, to $p \preccurlyeq r$;

(iii) jeśli $p \preccurlyeq q$ oraz $q \preccurlyeq p$, to $p = q$.

Dla dowolnego podzbioru $R \subset P$ i $p, q \in R$ takich, że $p \preccurlyeq q$ oznaczmy:

$$R(p, \preccurlyeq) = \{z \in R : p \preccurlyeq z\} \qquad \text{oraz} \qquad R(p, q) = \{z \in R : p \preccurlyeq z \preccurlyeq q\}\,.$$

Definicja 5.1. Podzbiór $C \subset P$ nazywamy *całkowicie uporządkowanym* lub *łańcuchem*, gdy dla dowolnych $p, q \in C$ $p \preccurlyeq q$ lub $q \preccurlyeq p$.

Definicja 5.2. Ciąg $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do zbioru P nazywamy (*ściśle*) *monotonicznym*, gdy $(p_i \prec p_j)$ $p_i \preccurlyeq p_j$ dla $i < j$ ($p_i \prec p_j$ oznacza $p_i \preccurlyeq p_j$ oraz $p_i \neq p_j$).

Definicja 5.3. Podzbiór $R \subset P$ nazywamy *silnie porządkowo zwartym*, gdy dla każdego ciągu monotonicznego $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach ze zbioru R znajdziemy podciąg $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, oraz element $q \in R$ o własnościach: $p_{n_k} \to q$ dla $k \to +\infty$ i $p_n \preccurlyeq q$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 5.4. Element $m \in P$ nazywamy *maksymalnym* w P, gdy dla każdego $p \in P$ z $m \preccurlyeq p$ wynika $m = p$.

Definicja 5.5. Element $q \in P$ nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru $R \subset P$, gdy $p \preccurlyeq q$ dla każdego $p \in R$.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie zwane zasadą maksymalności. W dowodzie skorzystamy z Lematu Kuratowskiego–Zorna, który zacytujemy bez dowodu.

Lemat 5.1 (Kuratowski–Zorn)**.** *Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preccurlyeq$. Jeżeli każdy łańcuch $C \subset P$ posiada ograniczenie górne w P, to w zbiorze P istnieje element maksymalny. W szczególności, dla dowolnego $p \in P$ istnieje taki element maksymalny $q \in P$, że $p \preccurlyeq q$.*

Twierdzenie 5.1 (Zasada maksymalności)**.** *Niech $(P, d, \preccurlyeq)$ będzie przestrzenią metryczną, w której wprowadzono relację częściowego porządku $\preccurlyeq$ i niech R będzie silnie porządkowo zwartym podzbiorem P. Wtedy dla każdego $p \in R$ istnieje taki element maksymalny q w R, że $p \preccurlyeq q$.*

Dowód. Niech C będzie dowolnym niepustym łańcuchem w R. Pokażemy, że C jest ograniczony z góry, a więc na mocy Lematu Kuratowskiego–Zorna, w R będzie istniał element maksymalny o żądanych własnościach.

Krok 1. Wykażemy prawdziwość poniższego warunku:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p = p(\varepsilon) \in C\ \forall q, r \in C \quad p \preccurlyeq q \preccurlyeq r \Rightarrow \operatorname{dist}\big(q, C(r, \preccurlyeq)\big) < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Przypuśćmy, że (5.2) nie zachodzi. Niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą, której istnienie gwarantuje zaprzeczenie warunku (5.2). Dla $u_1 \in C$ znajdziemy elementy $v_1, w_1 \in C$ takie, że

$$u_1 \preccurlyeq v_1 \preccurlyeq w_1 \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{dist}\big(v_1, C(w_1, \preccurlyeq)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Zauważmy, iż tak naprawdę zachodzi $u_1 \preccurlyeq v_1 \prec w_1$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $\operatorname{dist}\big(v_1, C(w_1, \preccurlyeq)\big) = 0$. Analogicznie dla $u_2 = w_1$ znajdziemy $v_2, w_2 \in C$, by

$$u_2 \preccurlyeq v_2 \prec w_2 \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{dist}\big(v_2, C(w_2, \preccurlyeq)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Kontynuując opisany powyżej proces, otrzymujemy ściśle monotoniczny ciąg $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $d(v_n, v_m) \geqslant \varepsilon$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Ponieważ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie posiada żadnego podciągu zbieżnego, więc zbiór R nie może być silnie porządkowo zwarty. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości warunku (5.2).

Krok 2. Skonstruujemy ciąg monotoniczny $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach ze zbioru C spełniający warunek

$$\forall\ q, r \in C \quad p_n \preccurlyeq q \preccurlyeq r \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{dist}\big(q, C(r, \preccurlyeq)\big) < \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{5.3}$$

Z (5.2) dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ znajdziemy takie p_1, że dla wszystkich $q, r \in C$ jeśli tylko $p_1 \preccurlyeq q \preccurlyeq r$, to $\operatorname{dist}\big(q, C(r \preccurlyeq)\big) < 2^{-1}$. Załóżmy, że udało się nam skonstruować pierwsze n wyrazów ciągu $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, które spełniają warunek (5.3). Wtedy z (5.2) dla $\varepsilon = 2^{-(n+1)}$ znajdziemy $p \in C$ takie, że dla dowolnych $q, r \in C$ jeśli $p \preccurlyeq q \preccurlyeq r$, to $\operatorname{dist}\big(q, C(r, \preccurlyeq)\big) \leqslant 2^{-(n+1)}$. Wyraz p_{n+1} definiujemy jako: $p_{n+1} = \max\{p, p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. (Oczywiście maksimum elementów $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ istnieje, gdyż C jest łańcuchem.)

Krok 3. Skonstruujemy monotoniczny ciąg $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach ze zbioru C, będący zarazem ciągiem Cauchy'ego. Wybierzmy $q_1 \in C(p_1, p_2)$, gdzie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem z *Kroku 2.* Dzięki (5.3) znajdziemy element $q_2 \in C(p_2, \preccurlyeq)$, dla którego $d(q_1, q_2) < 2^{-1}$. (Wystarczy zastosować warunek (5.3) z $q = q_1$ oraz $r = p_2$). Jeśli istnieje takie $n_3 \in \mathbb{N}$, że $q_2 \preccurlyeq p_{n_3}$, to z warunku $p_2 \preccurlyeq q_2 \preccurlyeq p_{n_3}$ wynika, iż znajdziemy $q_3 \in C(p_{n_3}, \preccurlyeq)$ oddalone od q_2 o mniej niż 2^{-n_3}. Ponieważ $n_3 \geqslant 3$, więc dla prostoty możemy założyć, iż $n_3 = 3$. Gdyby jednak $p_n \preccurlyeq q_2$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to jako nasz ciąg $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wybieramy ciąg stały, którego wyrazy są równe q_2. Kontynuując powyższy proces, otrzymamy (zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku) monotoniczny ciąg $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający:

$$d(q_n, q_{n+1}) < \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

W świetle (5.4) stwierdzamy, że $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w C, a więc na podstawie założenia znajdziemy taki element $u \in R$, że $q_n \to u$, gdy $n \to +\infty$ oraz $q_n \preccurlyeq u$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Krok 4. Pokażemy, że C jest ograniczony z góry. Niech $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem skonstruowanym w *Kroku 3.* Obierzmy dowolny $s \in C$. Gdyby $s \preccurlyeq q_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $s \preccurlyeq u$, a więc łańcuch C byłby ograniczony. Możemy zatem założyć, że $q_n \preccurlyeq s$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Skonstruujemy obecnie ciąg monotoniczny $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach ze zbioru $C(s, \preccurlyeq)$ spełniający warunek

$$d(q_n, s_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Z (5.3) dla $n = 1$, $q = q_1$, $r = s$ znajdziemy takie $s_1 \in C(s, \preccurlyeq)$, że $d(q_1, s_1) < 2^{-1}$. Załóżmy, że mamy już pierwsze k wyrazów ciągu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wtedy dla $n = k+1$, $q = q_{k+1}$, $r = s_k$ z uwagi na *Krok 3* oraz warunek (5.3) znajdziemy takie $\tilde{s} \in C(s_k, \preccurlyeq)$, że $d(q_{k+1}, \tilde{s}) < 2^{-(k+1)}$. Jako wyraz $k+1$ obieramy $s_{k+1} = \tilde{s}$.

Ponieważ z (5.5) $s_n \to u$, gdy $n \to +\infty$, to z założenia silnej porządkowej zwartości zbioru R mamy $s_n \preccurlyeq u$ dla $n \in \mathbb{N}$. W szczególności: $s \preccurlyeq u$.

Dowiedliśmy, iż dowolny łańcuch $C \subset R$ ma ograniczenie górne, a więc na mocy Lematu Kuratowskiego–Zorna (Lem. 5.1) dla dowolnego $p \in R$ istnieje element maksymalny w $q \in R$ taki, że $p \preccurlyeq q$. $\square$

Przykład 5.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, a $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją. Zdefiniujmy relację

$$x \preccurlyeq y \quad \iff \quad d(x,y) \leqslant \varphi(x) - \varphi(y).$$

Łatwo sprawdzić, iż wprowadzona relacja jest częściowym porządkiem. Przestrzeń metryczną (X, d), w której wprowadzono częściowy porządek zdefiniowany powyżej będziemy oznaczać przez X_φ.

Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną, a funkcja φ jest półciągła z dołu oraz ograniczona z dołu na X, powiedzmy $m \leqslant \varphi(x)$ dla każdego $x \in X$. Pokażemy, iż zbiór X jest silnie porządkowo zwarty. Wybierzmy ciąg monotoniczny $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do X. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})] = \varphi(x_1) - \varphi(x_{n+1}) \leqslant \varphi(x_1) - m.$$

Stąd $\sum_{i=1}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) < +\infty$, a więc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego i jako taki jest zbieżny do pewnego elementu $\tilde{x} \in X$. Ponieważ $x_n \preccurlyeq x_m$ dla $n \leqslant m$, to $\varphi(x_m) \leqslant \varphi(x_n) - d(x_n, x_m)$, czyli przechodząc z m do nieskończoności, z uwagi na półciągłość z dołu funkcji φ, otrzymujemy

$$\varphi(\tilde{x}) \leqslant \liminf_{m\to\infty} \varphi(x_m) \leqslant \varphi(x_n) - d(x_n, \tilde{x}).$$

Czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, \tilde{x}) \leqslant \varphi(x_n) - \varphi(\tilde{x}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \preccurlyeq \tilde{x}.$$

Na mocy Twierdzenia 5.1, dla dowolnego $x \in X_\varphi$ istnieje element maksymalny $\overline{x}$ w X_φ taki, że $x \preccurlyeq \overline{x}$. Tym samym udowodniliśmy Twierdzenie Brøndsteda, które cytujemy poniżej.

Twierdzenie 5.2 (Brøndsted)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją półciągłą z dołu oraz ograniczoną z dołu na X. Wtedy dla dowolnego $x \in X_\varphi$ istnieje co najmniej jeden element maksymalny $\overline{x}$ w X_φ taki, że $x \preccurlyeq \overline{x}$.*

Zauważmy, iż Twierdzenie 5.2, a więc także Twierdzenie 5.1 prowadzi do następującego Twierdzenia Caristi o punkcie stałym.

Twierdzenie 5.3 (Caristi)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją półciągłą z dołu oraz ograniczoną z dołu na X. Niech $g\colon X \to X$ będzie funkcją taką, że $d\big(x, g(x)\big) \leqslant \varphi(x) - \varphi\big(g(x)\big)$ dla wszystkich $x \in X$. Wtedy g ma przynajmniej jeden punkt stały.*

Dowód. Rozważmy zbiór częściowo uporządkowany X_φ. Niech $\overline{x} \in X_\varphi$ będzie elementem maksymalnym w zbiorze X_φ. (Element taki istnieje na mocy Twierdzenia 5.2, bądź Twierdzenia 5.1.) Ponieważ $d\big(\overline{x}, g(\overline{x})\big) \leqslant \varphi(\overline{x}) - \varphi\big(g(\overline{x})\big)$, więc $\overline{x} \preccurlyeq g(\overline{x})$ w X_φ. Z maksymalności $\overline{x}$ wnosimy, iż $\overline{x} = g(\overline{x})$. □

5.2 Twierdzenie o aproksymacji

Niniejszy paragraf, którego głównym wynikiem jest twierdzenie o istnieniu węzłów dla rozwiązań ε–przybliżonych, zaczniemy od następującej definicji.

Definicja 5.6. Podzbiór D przestrzeni unormowanej X nazywamy *lokalnie domkniętym*, gdy dla dowolnego $x \in D$, istnieje taki promień $r = r(x) > 0$, że $B_X(x, r) \cap D$ jest zbiorem domkniętym w X.

Uwaga 5.1. Oczywiście każdy zbiór domknięty w przestrzeni unormowanej jest lokalnie domknięty w tej przestrzeni.

Uwaga 5.2. Każdy zbiór otwarty D w przestrzeni unormowanej X jest lokalnie domknięty. Istotnie, niech $x \in D$ wtedy z otwartości zbioru D istnieje takie $r_1 > 0$, że $K_X(x, r_1) \subset D$, a więc także $B_X(x, \frac{1}{2}r_1) \subset K_X(x, r_1) \subset D$. Oznaczając $r = \frac{1}{2}r_1$ mamy: $D \cap B_X(x, r) = B_X(x, r)$, co dowodzi lokalnej domkniętości zbioru D.

Przykład 5.2. Rozważmy $X = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową. Rozpatrzmy zbiór:

$$D = \Big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho \in [0, 1] \text{ oraz } \theta \in \big(0, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big\}.$$

Pokażemy, że D nie jest lokalnie domknięty. Niech $O = (0, 0) \in D$, a $r > 0$ będzie dowolne. Uzasadnimy, że zbiór $D \cap B_{\mathbb{R}^2}(O, r)$ nie jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^2$. Rozpatrzymy w tym celu dwa przypadki: $r > 1$ albo $r \leqslant 1$. W pierwszym przypadku mamy: $D \cap B_{\mathbb{R}^2}(O,r) = D$, jednak D nie jest zbiorem domkniętym. W drugim mamy natomiast: $D \cap B_{\mathbb{R}^2}(O,r) = rD$. Istotnie, niech $(x,y) \in D \cap B_{\mathbb{R}^2}(O,r)$, a więc $\theta(x,y) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\rho(x,y) \leqslant r$. Zatem $(x,y) \in rD$. Jeśli $(x,y) \in rD$, to $\theta(x,y) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, a $\rho(x,y) \leqslant r < 1$. Czyli $(x,y) \in D$ oraz $(x,y) \in B_{\mathbb{R}^2}(O,r)$. Jednakże zbiór rD nie jest domknięty.

Przykład 5.3. Rozważmy przestrzeń $C[-1,1]$ funkcji ciągłych na przedziale $[-1,1]$ o wartościach rzeczywistych oraz zbiór

$$A = \{f \in C[-1,1] : f(0) = 0\}.$$

Jak łatwo zauważyć zbiór A jest domknięty jeśli rozważymy topologię wyznaczoną przez normę supremalną $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$. Pokażemy, że A nie jest lokalnie domknięty, gdy topologia będzie zadana przez normę całkową

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1}|f(x)|dx.$$

W tym celu dla dowolnego $r > 0$ wprowadźmy oznaczenia:

$$B_r = \{f \in C[-1,1] : \|f\|_1 \leqslant r\} \qquad \text{oraz} \qquad f_r \equiv \frac{r}{2},$$

a ponadto rozpatrzmy ciąg funkcji ciągłych $f_n^r \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, którego wyraz ogólny dany jest wzorem

$$f_n^r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}nr|x| & \text{dla } x \in [-1/n, 1/n], \\ \dfrac{1}{2}r & \text{dla } x \in (-\infty, -1/n) \cup (1/n, +\infty). \end{cases}$$

Wtedy $f_n^r \in A \cap B_r$ oraz $\|f_n^r - f_r\|_1 \to 0$, gdy $n \to +\infty$, jednakże $f_r \notin A \cap B_r$. Tym samym dowiedliśmy, iż dla dowolnego $r > 0$ zbiór $A \cap B_r$ nie jest domknięty, gdy rozważamy topologię pochodzącą od normy całkowej, a więc zbiór A nie jest lokalnie domknięty względem tej topologii.

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego (5.1). Jeśli założymy, że zbiór D jest lokalnie domknięty, to przez D_0 możemy oznaczyć zbiór domknięty, będący przekrojem D oraz kuli o środku w punkcie x_0 i promieniu $r_0 > 0$ (por. Def. 5.6). Ustalmy $t_0^* \in (t_0, t_0^2)$. Ponieważ funkcja $f(t,x)$ jest ciągła, to znajdziemy takie otoczenia punktów t_0 oraz x_0, mianowicie U_{t_0} i U_{x_0}, że dla pewnego $M > 0$

$$\|f(t,x)\| \leqslant M \qquad \text{dla } t \in U_{t_0} \text{ oraz } x_0 \in U_{x_0}.$$

Zmniejszając (w razie potrzeby) promień r_0, a także liczbę $t_0^* - t_0$, możemy zakładać, że

$$[t_0, t_0^*] \subset U_{t_0} \qquad \text{i} \qquad B_X(x_0, r_0) \subset U_{x_0}$$

oraz

$$t_0^* - t_0 \leqslant \frac{r_0}{M+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

W dalszej części niniejszej pracy przez $F \colon \mathbb{R} \times X \to X$ będziemy oznaczać funkcję ciągłą będącą przedłużeniem $f|_{[t_0,t_0^*]\times D_0}$. Postulowane przedłużenie istnieje na mocy Twierdzenia 1.8.

Zbierzmy powyższe rozważania jako:

Założenia

OGÓLNE:

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D\bigr)=0 \text{ dla } (t,x)\in(t_0^1,t_0^2)\times D, \tag{$O1$}$$

$$D \text{ jest zbiorem lokalnie domkniętym w przestrzeni Banacha } X, \tag{O2}$$

SZCZEGÓŁOWE:

$$D_0=D\cap B_X(x_0,r_0) \text{ jest zbiorem domkniętym w } X, \tag{S1}$$

$$\|F(t,x)\|\leqslant M \text{ dla wszystkich } (t,x)\in[t_0,t_0^*]\times B_X(x_0,r_0), \tag{S2}$$

$$t_0^*-t_0\leqslant\frac{r_0}{M+1}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{S3}$$

Uwaga 5.3. Zauważmy, iż warunek $(O1)$ jest zawsze spełniony dla punktów $(t,x)\in(t_0^1,t_0^2)\times D$ takich, że $x\in\operatorname{Int}D$. Istotnie, niech promień $\rho>0$ będzie taki, że $B_X(x,\rho)\subset D$. Wtedy dla $0<\lambda<\rho\bigl(\|f(t,x)\|+1\bigr)^{-1}$ mamy $x+\lambda f(t,x)\in B_X(x,\rho)\subset D$, czyli $\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D\bigr)=0$.

Mając na uwadze prostotę zapisu, wprowadźmy następujące oznaczenie; dla dowolnej pary $(p,w)\in[t_0,t_0^*)\times D_0$ niech

$$Z(p,w)=\{(t,x)\in[t_0,t_0^*)\times D_0 : p\leqslant t<t_0^* \text{ i } \|x-w\|\leqslant(M+1)(t-p)\}. \tag{5.6}$$

Twierdzenie 5.4. *Niech Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe będą spełnione. Wtedy dla $(t,x)\in Z(t_0,x_0)$ następujące warunki są równoważne:*

a) $\lim_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D\bigr)=0$;

b) $\lim_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D_0\bigr)=0$;

c) $\lim_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\Bigl[x+\lambda f(t,x),D_0\cap B_X\bigl(x,(M+1)\lambda\bigr)\Bigr]=0$.

Dowód. Ponieważ dla każdego $x\in D_0$ oraz $\lambda>0$ prawdziwe są zawierania

$$D_0\cap B_X\bigl(x,(M+1)\lambda\bigr)\subset D_0\subset D,$$

więc

$$\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D\bigr)\leqslant\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D_0\bigr)\leqslant\operatorname{dist}\Bigl[x+\lambda f(t,x),D_0\cap B_X\bigl(x,(M+1)\lambda\bigr)\Bigr].$$

A zatem implikacje c) $\Rightarrow$ b) oraz b) $\Rightarrow$ a) są oczywiste. Pozostaje udowodnić implikację a) $\Rightarrow$ c). W tym celu wybierzmy dowolny $(t,x)\in Z(t_0,x_0)$ i załóżmy, że warunek a) zachodzi. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon\in(0,1]$, z definicji granicy, znajdziemy $\lambda(\varepsilon)$, takie, że

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\bigl(x+\lambda f(t,x),D\bigr)<\varepsilon \qquad \text{dla } 0<\lambda<\lambda(\varepsilon). \tag{5.7}$$

Oczywiście możemy zakładać, iż $\lambda(\varepsilon)$ leży w przedziale $(0,t_0^*-t)$. Przepisując wzór (5.7) w postaci

$$\frac{1}{\lambda}\inf_{y\in D}\|x+\lambda f(t,x)-y\|<\varepsilon \qquad \text{dla } 0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$$

stwierdzamy, że dla każdego $\lambda \in \big(0, \lambda(\varepsilon)\big)$ istnieje $x(\lambda) \in D$, dla którego zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\lambda}\,\|x + \lambda f(t,x) - x(\lambda)\| < \varepsilon. \tag{5.8}$$

Sprawdzimy, iż tak naprawdę $x(\lambda)$ należy do zbioru $D_0 \cap B_X\big(x, (M+1)\lambda\big)$. Ponieważ

$$\|x - x(\lambda)\| \leqslant \|x + \lambda f(t,x) - x(\lambda)\| + \|\lambda f(t,x)\| \leqslant \lambda\varepsilon + M\lambda \leqslant \lambda(M+1), \tag{5.9}$$

więc $x(\lambda) \in B_X\big(x, (M+1)\lambda\big)$. Ponadto, z założeń oraz (5.9), otrzymujemy

$$\|x(\lambda) - x_0\| \leqslant \|x - x(\lambda)\| + \|x - x_0\| \leqslant (M+1)\lambda + (M+1)(t - t_0) \leqslant (M+1)(t_0^* - t_0) \leqslant r_0,$$

czyli $x(\lambda) \in B_X(x_0, r_0)$. Dowiedliśmy więc, że $x(\lambda) \in D_0 \cap B_X\big(x, (M+1)\lambda\big)$, co w świetle (5.8) oznacza, iż dla każdego $\lambda \in \big(0, \lambda(\varepsilon)\big)$

$$\frac{1}{\lambda}\operatorname{dist}\Big[x + \lambda f(t,x), D_0 \cap B_X\big(x, (M+1)\lambda\big)\Big] < \varepsilon.$$

Z dowolności ε stwierdzamy, że warunek c) zachodzi. □

A oto wspominane już kilkakrotnie twierdzenie odgrywające kluczową rolę w definiowaniu rozwiązań przybliżonych.

Twierdzenie 5.5 (O aproksymacji)**.** *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Niech $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ oraz $\varepsilon \in (0,1]$ będą ustalone. Wtedy istnieje układ (ciąg) węzłów ε-przybliżonych odpowiadających zagadnieniu* (5.1), *tj. istnieją:*

a) *ściśle rosnący ciąg $(t_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ o wyrazach należących do przedziału $[t_0, T_0)$, zbieżny do punktu T_0, gdy $i \to +\infty$;*

b) *ciąg $(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ o wyrazach należących do zbioru D_0;*

takie, że dla każdego indeksu $i \in \mathbb{N}_0$:

(i) $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$;

(ii) $\|x_i - x_{i+1} + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(t_{i+1} - t_i)$;

(iii) *dla dowolnych punktów $\big(t^{(1)}, x^{(1)}\big)$, $\big(t^{(2)}, x^{(2)}\big) \in \mathbb{R} \times X$ takich, że $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_{i+1}]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_i, (M+1)(t_{i+1} - t_i)\big)$ zachodzi*

$$\Big\|F\big(t^{(1)}, x^{(1)}\big) - F\big(t^{(2)}, x^{(2)}\big)\Big\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Zanim przystąpimy do dowodu, poczynimy uwagę.

Uwaga 5.4. Powyższe twierdzenie postuluje istnienie ciągu par (t_i, x_i), które stanowić będą wierzchołki krzywej łamanej przybliżającej rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (5.1). Jest to więc nic innego, jak próba przeniesienia metody krzywych łamanych, stosowanej w dowodzie Twierdzenia Peano na przypadek nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha.

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji zupełnej. Jako zerowy wyraz ciągu obierzmy (t_0, x_0) i załóżmy, że ciąg skończony $\{(t_j, x_j) : 0 \leqslant j \leqslant i\}$, gdzie $i \geqslant 0$, został skonstruowany tak, by spełniał warunki (i)–(iii) aż do indeksu $(i-1)$ włącznie oraz by $t_i < T_0$. W przypadku, gdy $i = 0$, zakładamy, iż warunki (i)–(iii) są spełnione. Oznaczmy

$$\theta_i = \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_i, \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i)\}, \qquad t_{i+1} = t_i + \theta_i \tag{5.10}$$

i rozważmy zbiór

$$Z(t_i, t_{i+1}, x_i) = \{(t, x) \in Z(t_i, x_i) : t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}.$$

Wykażemy, że relacja $\preccurlyeq$ zdefiniowana następująco

$$(t, x) \preccurlyeq (s, y) \iff \|x - y + (s-t) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(s-t) \quad \text{oraz} \quad t \leqslant s.$$

jest relacją częściowego porządku w zbiorze $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$. W tym celu wybierzmy dowolne punkty $(\tau_j, \xi_j) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$, gdzie $j = 1, 2, 3$. Oczywiście $(\tau_1, \xi_1) \preccurlyeq (\tau_1, \xi_1)$. Załóżmy następnie, że $(\tau_1, \xi_1) \preccurlyeq (\tau_2, \xi_2)$ oraz $(\tau_2, \xi_2) \preccurlyeq (\tau_3, \xi_3)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\xi_1 - \xi_3 + (\tau_3 - \tau_1) f(t_i, x_i)\| &\leqslant \|\xi_1 - \xi_2 + (\tau_2 - \tau_1) f(t_i, x_i)\| + \|\xi_2 - \xi_3 + (\tau_3 - \tau_2) f(t_i, x_i)\| \\ &\leqslant \varepsilon(\tau_3 - \tau_1) \end{aligned}$$

oraz oczywiście $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_3$, czyli $(\tau_1, \xi_1) \preccurlyeq (\tau_3, \xi_3)$. Ostatecznie, jeśli $(\tau_1, \xi_1) \preccurlyeq (\tau_2, \xi_2)$ oraz $(\tau_2, \xi_2) \preccurlyeq (\tau_1, \xi_1)$, co jest równoważne nierównościom:

$$\|\xi_1 - \xi_2 + (\tau_2 - \tau_1) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(\tau_2 - \tau_1), \qquad \tau_1 \leqslant \tau_2, \qquad \tau_2 \leqslant \tau_1,$$

to łatwo otrzymujemy, iż $\tau_1 = \tau_2$ i w konsekwencji $\xi_1 = \xi_2$. Tym samym dowód faktu, iż relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$ możemy uznać za zakończony.

Obecnie wykażemy, że zbiór $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$ jest silnie porządkowo zwarty. W tym celu wybierzmy dowolny ciąg monotoniczny $\big((\tau_n, \xi_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach z $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$.

Ponieważ $\tau_n \leqslant \tau_{n+1} \leqslant t_{i+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jako rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny do pewnego $\tau \leqslant t_{i+1}$.

Niech $\eta > 0$ będzie dowolne. Ze zbieżności ciągu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ znajdziemy takie $n_0 \in \mathbb{N}$, by dla $m > n \geqslant n_0$ zachodziła nierówność

$$|\tau_n - \tau_m| \leqslant \frac{\eta}{M+1}.$$

Wtedy dla $m > n \geqslant n_0$ z uwagi na monotoniczność ciągu $\big((\tau_n, \xi_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ mamy:

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi_m\| &\leqslant (\tau_m - \tau_n)\, \|f(t_i, x_i)\| + \sum_{j=n}^{m-1} \|\xi_j - \xi_{j+1} + (\tau_{j+1} - \tau_j) f(t_i, x_i)\| \\ &\leqslant M(\tau_m - \tau_n) + \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \eta, \end{aligned} \tag{5.11}$$

a zatem $\big((\tau_n, \xi_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $[t_i, t_{i+1}] \times D_0$. Stąd istnieje granica (τ, ξ) należąca do zbioru $[t_i, t_{i+1}] \times D_0$. Ponieważ $(\tau_n, \xi_n) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\|\xi_n - x_i\| \leqslant (M+1)(\tau_n - t_i) \qquad \text{oraz} \qquad t_i \leqslant \tau_n \leqslant t_{i+1}, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Przechodząc granicznie w powyższych związkach z $n \to +\infty$, otrzymujemy

$$\|\xi - x_i\| \leqslant (M+1)(\tau - t_i) \qquad \text{oraz} \qquad t_i \leqslant \tau \leqslant t_{i+1},$$

co dowodzi, że $(\tau, \xi) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$.

Korzystając z monotoniczności ciągu $\big((\tau_n, \xi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ dla $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ mamy:

$$\|\xi_n - \xi_m + (\tau_m - \tau_n) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(\tau_m - \tau_n) \qquad \text{oraz} \qquad \tau_n \leqslant \tau_m.$$

Stąd przy ustalonym n oraz $m \to +\infty$ dostajemy

$$\|\xi_n - \xi + (\tau - \tau_n) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(\tau - \tau_n) \qquad \text{oraz} \qquad \tau_n \leqslant \tau,$$

a zatem $(\tau_n, \xi_n) \preccurlyeq (\tau, \xi)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Tym samym wykazaliśmy, iż zbiór $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$ jest silnie porządkowo zwarty.

Na mocy Twierdzenia 5.1 dla elementu (t_i, x_i) znajdziemy w zbiorze $Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$ taki element maksymalny (t^*, x^*), że $(t_i, x_i) \preccurlyeq (t^*, x^*)$, tj.

$$\|x_i - x^* + (t^* - t_i) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(t^* - t_i) \qquad \text{oraz} \qquad t_i \leqslant t^*. \tag{5.12}$$

Twierdzimy, że $t^* = t_{i+1}$. Przypuśćmy, iż jest inaczej, tzn. $t^* < t_{i+1}$ (nie może być $t^* > t_{i+1}$, gdyż $t^* \leqslant t_{i+1}$). Zauważmy najpierw, że $(t^*, x^*) \in Z(t_0, x_0)$. Istotnie, $t^* \in [t_i, t_{i+1}] \subset [t_0, t_0^*)$, a ponadto

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\| &\leqslant \|x_i - x^*\| + \sum_{j=0}^{i-1} \|x_j - x_{j+1}\| \\ &\leqslant (t^* - t_i)\,\|f(t_i, x_i)\| + \|x_i - x^* + (t^* - t_i) f(t_i, x_i)\| \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j)\,\|f(t_j, x_j)\| + \sum_{j=0}^{i-1} \|x_j - x_{j+1} + (t_{j+1} - t_j) f(t_j, x_j)\| \\ &\overset{(\diamond)}{\leqslant} (M+\varepsilon)(t^* - t_i) + (M+\varepsilon) \sum_{j=0}^{i-1} (t_{j+1} - t_j) \leqslant (M+1)(t^* - t_0),\end{aligned} \tag{5.13}$$

gdzie nierówność $(\diamond)$ zachodzi na podstawie założenia (S2), założenia indukcyjnego oraz faktu, iż $(t_i, x_i) \preccurlyeq (t^*, x^*)$. Stąd na mocy Twierdzenia 5.4 mamy:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{dist}\big(x^* + \lambda f(t^*, x^*), D_0\big) = 0. \tag{5.14}$$

Z drugiej strony, ponieważ $(t^*, x^*) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$, to

$$|t^* - t_i| \leqslant \theta_i \leqslant \frac{1}{M+1} \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i) \leqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i),$$

oraz

$$\|x^* - x_i\| \leqslant (M+1)(t^* - t_i) \leqslant (M+1)\theta_i \leqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i).$$

W połączeniu z Przykładem 3.6, otrzymujemy

$$\|f(t^*, x^*) - f(t_i, x_i)\| = \|F(t^*, x^*) - F(t_i, x_i)\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

a zatem, korzystając z lipschitzowskości funkcji $x \mapsto \operatorname{dist}(x, D_0)$ (por. Prz. 1.1) mamy:

$$\left|\operatorname{dist}\big(x^* + \lambda f(t^*, x^*), D_0\big) - \operatorname{dist}\big(x^* + \lambda f(t_i, x_i), D_0\big)\right| \leqslant \lambda \left\|f(t^*, x^*) - f(t_i, x_i)\right\| \leqslant \frac{1}{2}\lambda\varepsilon.$$

Na mocy (5.14) otrzymujemy więc następującą nierówność

$$\limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{dist}\big(x^* + \lambda f(t_i, x_i), D_0\big) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Musi zatem istnieć $\lambda \in (0, t_{i+1} - t^*)$ oraz $x \in D_0$ takie, że $\|x^* - x + \lambda f(t_i, x_i)\| \leqslant \lambda\varepsilon$. Jeśli wybierzemy $t \in (t^*, t_{i+1})$, by $\lambda = t - t^*$, to otrzymamy $\|x^* - x + (t - t^*) f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon(t - t^*)$. Ponieważ $(t^*, x^*) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$, więc

$$\begin{aligned}
\|x - x_i\| &\leqslant \|x - x^*\| + \|x^* - x_i\| \\
&\leqslant (t^* - t)\,\|f(t_i, x_i)\| + \|x - x^* + (t^* - t) f(t_i, x_i)\| + (M+1)(t^* - t_i) \\
&\leqslant \varepsilon(t - t^*) + M(t - t^*) + (M+1)(t^* - t_i) \\
&\leqslant (M+1)(t - t_i),
\end{aligned}$$

co w połączeniu z faktem, iż $t \in (t^*, t_{i+1}) \subset [t_i, t_{i+1}]$ dowodzi, że $(t, x) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$.

Reasumując, wykazaliśmy, że $(t^*, x^*) \prec (t, x)$ (bo $t^* \neq t$) dla pewnego $(t, x) \in Z(t_i, t_{i+1}, x_i)$, co przeczy maksymalności elementu (t^*, x^*). Tym samym $t^* = t_{i+1}$. Kładąc $x_{i+1} = x^*$, na mocy definicji θ_i oraz (5.12), stwierdzamy, iż warunki: (i) i (ii) zachodzą także dla i-tego indeksu. Ponadto dla dowolnych punktów $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_{i+1}]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_i, (M+1)(t_{i+1} - t_i)\big)$, z uwagi na nierówności ($j = 1, 2$):

$$\left|t^{(j)} - t_i\right| \leqslant \theta_i \leqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i) \quad \text{i} \quad \left\|x^{(j)} - x_i\right\| \leqslant (M+1)\theta_i \leqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i),$$

otrzymujemy (por. Prz. 3.6)

$$\left\|F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)})\right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

a zatem również i warunek (iii) zachodzi dla i-tego indeksu .

Zauważmy, iż przedstawiony powyżej proces wybierania kolejnych elementów ciągu węzłów ε-przybliżonych odpowiadających zagadnieniu (5.1) może być kontynuowany w nieskończoność, gdyż związki

$$t_i < T_0 \qquad \text{oraz} \qquad \theta_i \leqslant \frac{1}{M+1}(T_0 - t_i),$$

prowadzą do następującego oszacowania

$$t_{i+1} = t_i + \theta_i \leqslant t_i + \frac{1}{M+1}(T_0 - t_i) = \frac{M}{M+1} t_i + \frac{1}{M+1} T_0 < T_0. \tag{5.15}$$

Na koniec wykażemy, iż $t_i \to T_0$, gdy $i \to +\infty$. Po pierwsze zauważmy, że ciąg $\big((t_i, x_i)\big)_{i \in \mathbb{N}_0}$ musi być zbieżny do pewnego elementu $(t_\infty, x_\infty) \in [t_0, T_0] \times D_0$. Istotnie, z konstrukcji wynika, iż $t_i \leqslant t_{i+1} < T_0$ dla $i \in \mathbb{N}_0$, a więc ciąg $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ma granicę t_∞ w $[t_0, T_0]$. Rozumując analogicznie jak w przypadku (5.13) dla wszystkich $j > i$ otrzymujemy nierówność $\|x_i - x_j\| \leqslant (M+1)(t_j - t_i)$, a zatem ciąg $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ o elementach ze zbioru D_0 jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ zbiór D_0 jest domknięty w przestrzeni Banacha X, więc musi istnieć element $x_\infty \in D_0$ taki, że $x_i \to x_\infty$, gdy $i \to +\infty$.

Po drugie: $(t_\infty, x_\infty) \in Z(t_0, x_0)$. Istotnie, raz jeszcze rozumując analogicznie jak w przypadku (5.13) dla x_i w miejsce x^* i t_i w miejsce t^* $(i \in \mathbb{N}_0)$, na mocy (5.15) mamy:

$$t_0 \leqslant t_i < T_0 < t_0^* \qquad \text{oraz} \qquad \|x_i - x_0\| \leqslant (M+1)(t_i - t_0),$$

czyli dążąc z i do nieskończoności dostajemy:

$$t_0 \leqslant t_\infty \leqslant T_0 < t_0^* \qquad \text{oraz} \qquad \|x_\infty - x_0\| \leqslant (M+1)(t_\infty - t_0).$$

Przypuśćmy w końcu, iż $t_\infty < T_0$. Wtedy dla wszystkich $i \in \mathbb{N}_0$ prawdziwa jest nierówność $T_0 - t_i \geqslant T_0 - t_\infty > 0$. Ponadto, zważywszy na półciągłość z dołu funkcji $(t, x) \mapsto \Delta(F, \frac{1}{2}\varepsilon, t, x)$ (por. Prz. 3.6), mamy

$$\liminf_{i\to\infty} \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i) \geqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_\infty, x_\infty) > 0. \tag{5.16}$$

Ponieważ minimum funkcji półciągłych z dołu jest półciągłe z dołu (zob. [21] str. 60), więc

$$\liminf_{i\to\infty} \theta_i \geqslant \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_\infty, \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_\infty, x_\infty)\} > 0,$$

lecz z drugiej strony

$$\lim_{i\to\infty} \theta_i = \lim_{i\to\infty} (t_{i+1} - t_i) = t_\infty - t_\infty = 0. \tag{5.17}$$

Otrzymana sprzeczność pokazuje, iż $t_\infty = T_0$. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione. □

Uwaga 5.5. Zmodyfikujmy powyższą konstrukcję w następujący sposób. Załóżmy, że dla wszystkich indeksów aż do $(i-1)$ włącznie, ciąg skończony $\{(t_j, x_j) : 0 \leqslant j \leqslant i\}$, gdzie $t_i < T_0$ oraz $i \geqslant 0$, spełnia warunki (i)–(iii). W przypadku, gdy $i = 0$, zakładamy, iż warunki (i)–(iii) są spełnione. Połóżmy:

$$\theta_i = \min\Big\{\varepsilon, T_0 - t_i, \frac{1}{M+1}\Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i)\Big\}, \qquad t_{i+1} = t_i + \theta_i. \tag{5.18}$$

Rozumując identyczne jak poprzednio jako wyraz (t_{i+1}, x_{i+1}) możemy obrać element (t^*, x^*) (wprowadzony w dowodzie powyżej). Jak łatwo zauważyć, warunki (i)–(iii) będą wtedy spełnione również i dla i-tego indeksu.

Tym razem istnieje jednak takie $j = j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, że $t_j = T_0$. Przypuśćmy, iż powyższe stwierdzenie jest fałszywe, tj. opisaną konstrukcję (ze zmodyfikowanym θ_i) można kontynuować w nieskończoność. Otrzymujemy wtedy ciąg $\big((t_i, x_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ o wyrazach należących do zbioru $Z(t_0, x_0)$ (por. (5.13)) zbieżny do pewnego $(t_\infty, x_\infty) \in Z(t_0, x_0)$, gdzie $t_\infty \leqslant T_0$.

Gdyby $t_\infty < T_0$, to podobnie jak w poprzednim dowodzie, dochodzimy do sprzeczność. Pozostaje więc rozpatrzyć przypadek $t_\infty = T_0$. Ponieważ (por. (5.17)) $\lim_{i\to\infty} \theta_i = 0$, to istnieje takie $i_0 \in \mathbb{N}$, że $\theta_i < \varepsilon$ dla wszystkich $i \geqslant i_0$. Ponadto dla wszystkich $i \in \mathbb{N}_0$ zachodzi nierówność $\theta_i = t_{i+1} - t_i < T_0 - t_i$. W świetle (5.18) dla $i \geqslant i_0$ mamy więc

$$\theta_i = \frac{1}{M+1}\Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i),$$

skąd otrzymujemy:

$$\liminf_{i\to\infty} \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i) = \lim_{i\to\infty} (M+1)\theta_i = 0,$$

co jednak przeczy warunkowi (por. (5.16))

$$\liminf_{i\to\infty} \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_i, x_i) \geqslant \Delta(F, \tfrac{1}{2}\varepsilon, t_\infty, x_\infty) > 0.$$

Reasumując: zależnie od definicji θ_i proces konstrukcji ciągu węzłów ε-przybliżonych może być skończony, bądź nieskończony.

Dowód Twierdzenia 5.5 na podstawie [23] (*Rozdział 6, Paragraf 2*). Jako zerowy wyraz konstruowanego ciągu obierzmy (t_0, x_0). Załóżmy, iż udało się nam skonstruować $\{(t_j, x_j) : 0 \leqslant j \leqslant i\}$, gdzie $t_i < T_0$ oraz $i \geqslant 0$ tak, by spełnione były warunki (i)–(iii) dla wszystkich indeksów aż do indeksu $(i-1)$ włącznie. W przypadku, gdy $i = 0$ zakładamy, iż warunki (i)–(iii) są spełnione. Niech Θ_i oznacza zbiór dodatnich liczb θ o własnościach:

$$\theta \leqslant \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_i\}, \tag{5.19}$$

$$\operatorname{dist}\big(x_i + \theta f(t_i, x_i), D\big) \leqslant \frac{1}{2}\theta\varepsilon, \tag{5.20}$$

$$\left\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \tag{5.21}$$

gdzie warunek (5.21) zachodzi dla wszystkich par $(t^{(1)}, x^{(1)}), (t^{(2)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R} \times X$ takich, że $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_i + \theta]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_i, (M+1)\theta\big)$.

Pokażemy, że zbiór Θ_i jest niepusty. Na podstawie założenia $(O1)$ dla $\frac{1}{2}\varepsilon$ istnieje takie $\theta(\varepsilon)$, że dla wszystkich $0 < \theta < \theta(\varepsilon)$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{dist}\big(x_i + \theta f(t_i, x_i), D\big) \leqslant \frac{1}{2}\theta\varepsilon.$$

Ponadto, z ciągłości funkcji $F(t,x)$ w punkcie (t_i, x_i), dla $\frac{1}{4}\varepsilon$ znajdziemy takie $\delta > 0$, że

$$|t_i - t| < \delta \text{ oraz } \|x_i - x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(t,x) - F(t_i, x_i)\| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Obierając

$$\theta < \frac{1}{M+1}\delta$$

dla $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_i + \theta]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_i, (M+1)\theta\big)$ otrzymujemy:

$$\left\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \right\| \leqslant \left\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t_i, x_i) \right\| + \left\| F(t_i, x_i) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Stąd dla

$$0 < \theta < \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_i, \delta, \theta(\varepsilon)\}$$

spełnione będą warunki (5.19)-(5.21), czyli faktycznie $\Theta_i \neq \emptyset$.

Sprawdzimy teraz, iż $\theta_i = \sup \Theta_i \in \Theta_i$ (por. Def. 3.4). Jak łatwo zauważyć warunek

$$\theta_i \leqslant \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_i\}$$

jest spełniony. Niech $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rosnącym o wyrazach z Θ_i zbieżnym do $\theta_i \in \Theta_i$. Korzystając z faktu, iż funkcja $x \mapsto \operatorname{dist}(x, D)$ spełnia warunek Lipschitza (por. Prz. 1.1), a także biorąc pod uwagę (5.20) dla θ_n, dostajemy

$$\operatorname{dist}\big(x_i + \theta_i f(t_i, x_i), D\big) \leqslant \operatorname{dist}\big(x_i + \theta_n f(t_i, x_i), D\big) + |\theta_i - \theta_n| \, \|f(t_i, x_i)\| \leqslant \frac{1}{2}\theta_n\varepsilon + |\theta_i - \theta_n| \, \|f(t_i, x_i)\|.$$

Przechodząc z $n \to +\infty$ otrzymujemy nierówność

$$\operatorname{dist}\big(x_i + \theta_i f(t_i, x_i)\big) \leqslant \frac{1}{2}\theta_i\varepsilon.$$

Musimy wykazać jeszcze, iż θ_i spełnia warunek (5.21). W tym celu wybierzmy dowolne $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_i + \theta_i]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X(x_i, (M+1)\theta_i)$. Wtedy ciągi, których wyrazy ogólne są równe ($j = 1, 2$):

$$t_n^{(j)} = \left(1 - \theta_n {\theta_i}^{-1}\right) t_i + \theta_n {\theta_i}^{-1} t^{(j)},$$
$$x_n^{(j)} = \left(1 - \theta_n {\theta_i}^{-1}\right) x_i + \theta_n {\theta_i}^{-1} x^{(j)},$$

dążą do $t^{(j)}$ oraz $x^{(j)}$, gdy $n \to +\infty$. Ponieważ $t_i \leqslant t^{(j)} \leqslant t_i + \theta_i$, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są następujące oszacowania

$$t_i = \left(1 - \theta_n {\theta_i}^{-1}\right) t_i + \theta_n {\theta_i}^{-1} t_i \leqslant t_n^{(j)} \leqslant \left(1 - \theta_n {\theta_i}^{-1}\right) t_i + \theta_n {\theta_i}^{-1}(t_i + \theta_i) \leqslant t_i + \theta_n$$

oraz

$$\|x_n^{(j)} - x_i\| = \|\theta_n {\theta_i}^{-1}(x^{(j)} - x_i)\| \leqslant \theta_n {\theta_i}^{-1}(M+1)\theta_i \leqslant (M+1)\theta_n.$$

Stąd na mocy (5.21) dla θ_n mamy

$$\left\| F(t_n^{(1)}, x_n^{(1)}) - F(t_n^{(2)}, x_n^{(2)}) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Korzystając z ciągłości funkcji $F(t, x)$ i przechodząc granicznie w powyższej nierówności z n dążącym do nieskończoności, otrzymujemy:

$$\left\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

Tym samym pokazaliśmy, że $\theta_i \in \Theta_i$.

Połóżmy $t_{i+1} = t_i + \theta_i$, a jako x_{i+1} wybierzmy punkt ze zbioru D, spełniający:

$$\|x_i - x_{i+1} + \theta_i f(t_i, x_i)\| \leqslant \theta_i \varepsilon,$$

co jest możliwe na podstawie (5.20) i definicji kresu dolnego. Zauważmy, iż tak naprawdę x_{i+1} należy do $D_0 = D \cap B_X(x_0, r_0)$, gdyż na mocy (S2) i (S3), założenia indukcyjnego oraz wyboru θ_i mamy

$$\begin{aligned}
\|x_0 - x_{i+1}\| &\leqslant \sum_{j=0}^{i} \|x_j - x_{j+1}\| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{i} \|x_j - x_{j+1} + (t_{j+1} - t_j) f(t_j, x_j)\| + \sum_{j=0}^{i} (t_{j+1} - t_j) \|f(t_j, x_j)\| \\
&\leqslant (M + \varepsilon) \sum_{j=0}^{i} (t_{j+1} - t_j) \leqslant (M+1)(t_{i+1} - t_0) \leqslant (M+1)(T_0 - t_0) \\
&\leqslant (M+1)(t_0^* - t_0) \leqslant r_0.
\end{aligned}$$

Zdefiniowaliśmy w ten sposób kolejny wyraz (t_{i+1}, x_{i+1}) spełniający (i)–(iii). Podobnie jak w poprzednim dowodzie możemy wykazać, iż proces wyboru elementów (t_i, x_i) może być kontynuowany w nieskończoność (por. (5.15)), jak również że skonstruowany ciąg $\big((t_i, x_i)\big)_{i \in \mathbb{N}_0}$ jest zbieżny do elementu (t_∞, x_∞), należącego do zbioru $[t_0, T_0] \times D_0$.Przypuśćmy, że $t_\infty < T_0$. Niech Θ_∞ oznacza zbiór tych dodatnich liczb θ, dla których spełnione są następujące warunki:

$$\theta \leqslant \frac{1}{M+1} \min\{\varepsilon, T_0 - t_\infty\}, \tag{5.22}$$

$$\operatorname{dist}\big(x_\infty + \theta f(t_\infty, x_\infty), D\big) \leqslant \frac{1}{4}\theta\varepsilon, \tag{5.23}$$

$$\Big\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \Big\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \tag{5.24}$$

gdzie warunek (5.24) zachodzi dla wszystkich punktów $(t^{(1)}, x^{(1)}), (t^{(2)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R} \times X$ takich, że $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_\infty - 2\theta, t_\infty + 2\theta]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_\infty, 2(M+1)\theta\big)$.

Analogicznie jak w przypadku zbioru Θ_i można pokazać, iż zbiór Θ_∞ jest niepusty, a zatem możemy wybrać pewne $\vartheta \in \Theta_\infty$. Ponieważ $\vartheta > 0$ oraz $\theta_i \to 0$, gdy $i \to +\infty$, więc znajdziemy takie $i_1 \in \mathbb{N}$, że $\vartheta > \theta_i$ dla wszystkich $i \geqslant i_1$. Ponadto, z definicji pary (t_∞, x_∞) istnieje $i_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|t_i - t_\infty| \leqslant \vartheta$ i $\|x_i - x_\infty\| \leqslant (M+1)\vartheta$ dla $i \geqslant i_2$. Niech $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$. Wykażemy, że dla wszystkich $i \geqslant i_0$ spełnione są warunki (5.19) i (5.21) z ϑ w miejsce θ.

Ponieważ $T_0 - t_\infty < T_0 - t_i$ dla dowolnych $i \in \mathbb{N}_0$, więc ϑ spełnia (5.19). By pokazać, iż dla $i \geqslant i_0$ liczba ϑ spełnia (5.21), wybierzmy $t^{(1)}, t^{(2)} \in [t_i, t_i + \vartheta]$ oraz $x^{(1)}, x^{(2)} \in B_X\big(x_i, (M+1)\vartheta\big)$. Wtedy dla $i \geqslant i_0$ mamy $(j = 1, 2)$:

$$|t^{(j)} - t_\infty| \leqslant |t^{(j)} - t_i| + |t_i - t_\infty| \leqslant \vartheta + \vartheta = 2\vartheta$$

oraz

$$\|x^{(j)} - x_\infty\| \leqslant \|x^{(j)} - x_i\| + \|x_i - x_\infty\| \leqslant 2(M+1)\vartheta,$$

czyli korzystając z (5.24) dostajemy:

$$\Big\| F(t^{(1)}, x^{(1)}) - F(t^{(2)}, x^{(2)}) \Big\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

W połączeniu z maksymalnością θ_i (por. def. θ_i) oraz naszym wcześniejszym stwierdzeniem, iż $\vartheta > \theta_i$ dla $i \geqslant i_0$, wnioskujemy, że (5.20) nie może zachodzić dla ϑ w przypadku, gdy $i \geqslant i_0$. Zatem

$$\operatorname{dist}\big(x_i + \vartheta f(t_i, x_i), D\big) > \frac{1}{2}\vartheta\varepsilon \qquad \text{dla } i \geqslant i_0,$$

skąd, dążąc z i do nieskończoności, mamy

$$\operatorname{dist}\big(x_\infty + \vartheta f(t_\infty, x_\infty), D\big) \geqslant \frac{1}{2}\vartheta\varepsilon > \frac{1}{4}\vartheta\varepsilon.$$

Powyższe oszacowanie stoi jednak w sprzeczności z (5.23). Tym samym pokazaliśmy, że $t_\infty = T_0$, co kończy dowód. $\square$

Uwaga 5.6. Zastępując warunek (5.21) warunkiem (zob. [22])

$$\|f(t, x) - f(t_i, x_i)\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla } t \in [t_i, t_i + \theta] \text{ i } x \in D \cap B_X\big(x_i, (M+1)\theta\big),$$

w ogólnym przypadku nie możemy twierdzić, że zbiór Θ_i jest domknięty z góry; w szczególności nie wiemy czy $\theta_i = \sup \Theta_i \in \Theta_i$ (por. Prz. 3.7).

Uwaga 5.7. W przypadku, gdy zamiast warunku (5.21) wykorzystamy następujące oszacowanie

$$\theta \leqslant \min\{\varepsilon, T_0 - t_i\},$$

istnieć będzie takie $j = j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, że $t_j = T_0$ (zob. też [6], Rozdział 4, Paragraf 2).

Zdefiniujemy teraz rozwiązanie ε-przybłożone. Niech Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe będą spełnione. Ustalmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ i niech $\big((t_i, x_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ będzie gwarantowanym przez Twierdzenie 5.5 ciągiem węzłów ε-przybliżonych odpowiadających zagadnieniu początkowemu (5.1).

Definicja 5.7. Funkcję $u_\varepsilon\colon [t_0, T_0] \to X$ określoną wzorem:

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_i & \text{dla } t = t_i, \\ x_i + \dfrac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(x_{i+1} - x_i) & \text{dla } t \in (t_i, t_{i+1}), \\ \lim_{i\to\infty} x_i & \text{dla } t = T_0, \end{cases} \tag{5.25}$$

nazywamy *ε-przybliżonym rozwiązaniem* zagadnienia (5.1).

Powyższa definicja jest poprawna z uwagi na wykazane w dowodzie Twierdzenia 5.5 istnienie granicy $\lim_{i\to\infty} x_i = x_\infty$. Warto zauważyć, iż we wnętrzu każdego przedziału (t_i, t_{i+1}) funkcja $u_\varepsilon(t)$ jest prostą łączącą punkty (t_i, x_i) oraz (t_{i+1}, x_{i+1}).

Poniższe twierdzenie charakteryzuje pewne własności rozwiązań ε-przybliżonych u_ε.

Twierdzenie 5.6. *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Ustalmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ i niech $\big((t_i, x_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ będzie ciągiem węzłów ε-przybliżonych odpowiadających zagadnieniu* (5.1), *natomiast $u_\varepsilon(t)$ rozwiązaniem ε-przybliżonym rozważanego zagadnieia. Wtedy*:

a) $\|u'_\varepsilon(t) - f(t_i, x_i)\| \leqslant \varepsilon$ *dla wszystkich $t \in (t_i, t_{i+1})$, gdzie $i \in \mathbb{N}_0$;*

b) *$u_\varepsilon(t)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[t_0, T_0]$;*

c) *$u_\varepsilon(t)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $M + 1$ na przedziale $[t_0, T_0]$;*

d) *$u_\varepsilon(t) \in B_X(x_0, r_0)$ oraz $\operatorname{dist}\big(u_\varepsilon(t), D_0\big) \leqslant \varepsilon$ dla każdego $t \in [t_0, T_0]$.*

Dowód. a) Ponieważ dla wszystkich $t \in (t_i, t_{i+1})$ $(i \in \mathbb{N}_0)$

$$u'_\varepsilon(t) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i}(x_{i+1} - x_i),$$

więc na Podstawie Twierdzenia 5.5 (ii) otrzymujemy

$$\big\|u'_\varepsilon(t) - f(t_i, x_i)\big\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{dla } t_i < t < t_{i+1}. \tag{5.26}$$

b) Wystarczy jedynie sprawdzić ciągłość w punktach t_i (dla $i \in \mathbb{N}_0$) oraz w punkcie T_0. Niech $i \in \mathbb{N}_0$. Wtedy (w przypadku, gdy $i = 0$ rozważamy jedynie granicę prawostronną):

$$\lim_{t\to t_i^-} u_\varepsilon(t) = \lim_{t\to t_i^-} \Big[x_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1})\Big] = x_i$$

oraz

$$\lim_{t\to t_i^+} u_\varepsilon(t) = \lim_{t\to t_i^+}\Big[x_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(x_{i+1}-x_i)\Big] = x_i,$$

a zatem funkcja u_ε jest ciągła w punktach t_i dla $i\in\mathbb{N}_0$. Wykażemy, iż u_ε jest również ciągła w punkcie T_0. Niech $\eta>0$ będzie dowolne. Na mocy Twierdzenia 5.5 istnieje $i_0\in\mathbb{N}$ takie, że $\|x_i-u(T_0)\|<\frac{1}{2}\eta$ oraz $\|x_{i+1}-x_i\|<\frac{1}{2}\eta$ dla $i\in\mathbb{N}$ i $i\geqslant i_0$. Oznaczmy $\delta(\eta)=T_0-t_{i_0}$. Niech $T_0-t<\delta(\eta)$, tzn. $t_{i_0}<t$. Jeśli $t=t_i$ dla pewnego $i\geqslant i_0$, to $\|u(t)-u(T_0)\|=\|x_i-u(T_0)\|<\eta$. Jeśli natomiast $t\in(t_i,t_{i+1})$ dla pewnego $i\geqslant i_0$, to

$$\|u(t)-u(T_0)\|\leqslant\|x_i-u(T_0)\|+\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant\|x_i-u(T_0)\|+\|x_{i+1}-x_i\|<\eta,$$

a zatem funkcja u_ε jest ciągła w punkcie T_0.

c) W świetle (5.26) dla $t\in(t_0,T_0)\setminus\{t_i : i\in\mathbb{N}\}$, otrzymujemy oszacowanie na normę pochodnej

$$\|u_\varepsilon'(t)\|\leqslant\|u_\varepsilon'(t)-f(t_i,x_i)\|+\|f(t_i,x_i)\|\leqslant\varepsilon+M\leqslant M+1.$$

Zatem na mocy Twierdzenia 1.9 o wartości średniej:

$$\|u_\varepsilon(t)-u_\varepsilon(s)\|\leqslant(M+1)|t-s|\qquad\text{dla } t,s\in[t_0,T_0]. \tag{5.27}$$

d) Na podstawie (5.27) (dla $s=t_0$) oraz Założenia Szczegółowego (S3), dla dowolnego $t\in[t_0,T_0]$ mamy $\|u_\varepsilon(t)-x_0\|\leqslant(M+1)(t-t_0)\leqslant r_0$, czyli $u_\varepsilon([t_0,T_0])\subset B_X(x_0,r_0)$. Co więcej dla $s=t_i$

$$\|u_\varepsilon(t)-x_i\|\leqslant(M+1)(t-t_i)\leqslant(M+1)\theta_i\qquad\text{dla } t\in[t_i,t_{i+1}]. \tag{5.28}$$

Dla dowolnego $t\in[t_0,T_0)$ istnieje $i\in\mathbb{N}_0$ takie, że $t\in[t_i,t_{i+1}]$, a zatem na mocy Definicji 5.7 oraz warunku (5.10) otrzymujemy

$$\operatorname{dist}\big(u_\varepsilon(t),D_0\big)\leqslant\|u_\varepsilon(t)-x_i\|\leqslant(M+1)\theta_i\leqslant\varepsilon.$$

Gdyby $t=T_0$, to dla pewnego $n_0\in\mathbb{N}$

$$\operatorname{dist}\big(u_\varepsilon(T_0),D_0\big)\leqslant\|u_\varepsilon(T_0)-x_{n_0}\|\leqslant\varepsilon.$$

□

Uwaga 5.8. Mówienie o funkcji $u_\varepsilon(t)$, jako o ε-przybliżonym rozwiązaniu zagadnienia (5.1) jest jak najbardziej uzasadnione, gdyż z (5.26), (5.28) oraz Twierdzenia 5.5 (iii) dla wszystkich $t\in(t_i,t_{i+1})$ $(i\in\mathbb{N}_0)$ mamy

$$\big\|u_\varepsilon'(t)-F\big(t,u_\varepsilon(t)\big)\big\|\leqslant\|u_\varepsilon'(t)-f(t_i,x_i)\|+\big\|F(t_i,x_i)-F\big(t,u_\varepsilon(t)\big)\big\|<2\varepsilon. \tag{5.29}$$

Uwagi

Twierdzenie 5.1, jak również wszystkie definicje występujące w Paragrafie 5.1, oprócz Definicji 5.4 oraz Definicji 5.5 pochodzą z [29]. Definicja 5.4 oraz Definicja 5.5 zaczerpnięte zostały natomiast z [24]. W [24] odnaleźć można również Lemat 5.1 wraz z dowodem (Rozdział 1, Paragraf 2). Definicja 5.6, Definicja 5.7, Twierdzenie 5.5 i Twierdzenie 5.6, a także Uwagi 5.5–5.8 pochodzą z [30]. Alternatywny dowód Twierdzenia 5.5 jest modyfikacją dowodu z [23] i [22]. Przykłady występujące w Rozdziale 5 są wkładem Autora niniejszej pracy. Czytelnik zainteresowany klasycznym dowodem Twierdzenia 5.2 odnajdzie go w [11] (Rozdział 1, Paragraf 1, Punkt 5). Tam również znaleźć można Twierdzenie 5.3, które w pełni charakteryzuje zupełne przestrzenie metryczne poprzez własność punktu stałego (zob. także [31]).

Rozdział 6

Twierdzenie o istnieniu rozwiązań

Poniższy rozdział stanowi uwieńczenie dotychczasowych rozważań w przypadku, gdy zbiór D będący czynnikiem iloczynu kartezjańskiego, na którym określona jest prawa strona zagadnienia Cauchy'ego (5.1), jest lokalnie wypukły. Głównym twierdzeniem jest Twierdzenie 6.2. Jego dowód oparty będzie na twierdzeniach o nierównościach różniczkowych (patrz Rozdział 4) oraz własnościach iloczynów półskalarnych (patrz Rozdział 3).

* * *

Przyjmując Założenia Ogólne i Założenia Szczegółowe oraz ustalając $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\mathscr{App} = \{u_\varepsilon \in C([t_0, T_0], X) : \varepsilon \in (0,1],\ u_\varepsilon \text{ jest rozwiązaniem } \varepsilon\text{-przybliżonym zag. (5.1)}\}$$

oraz

$$\mathscr{Lim} = \left\{ u \in C([t_0, T_0], X) : \begin{array}{c} \text{istnieje ciąg } (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ o wyrazach z } (0,1] \text{ zbieżny do 0 taki,} \\ \text{że ciąg } u_{\varepsilon_n} \rightrightarrows u \text{ na przedziale } [t_0, T_0], \text{ gdzie } u_{\varepsilon_n} \in \mathscr{App} \end{array} \right\}.$$

Określmy na przestrzeni $C([t_0, T_0], X)$ operator K wzorem

$$K(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds \qquad \text{dla } t_0 \leqslant t \leqslant T_0,$$

gdzie $F\colon \mathbb{R}\times X \to X$ jest funkcją ciągłą wprowadzoną na stronie 41. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in C([t_0, T_0], X)$ funkcja $F(\cdot, x(\cdot))\colon [t_0, T_0] \to X$ jest ograniczona przez stałą $N_x > 0$ jako ciągła na zbiorze zwartym, tzn. $\|F(t, x(t))\| \leqslant N_x$ dla wszystkich $t \in [t_0, T_0]$. Tym samym na mocy Twierdzenia Petisa (Tw. 1.11) oraz Twierdzenia Bochnera (Tw. 1.12) operator K jest poprawnie zdefiniowany. Ponadto, ponieważ dla $t, s \in [t_0, T_0]$ takich, że $|t - s| < \delta(\eta) = N_x^{-1}\eta$, prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\|K(x)(t) - K(x)(s)\| \leqslant \left| \int_s^t \|F(s, x(s))\|\, ds \right| \leqslant N_x|t - s| < \eta,$$

więc $K(x) \in C([t_0, T_0], X)$.

Uwaga 6.1. Zbiór punktów stałych operatora K, tzn. punktów $x \in C([t_0, T_0], X)$ takich , że $K(x) = x$ oraz zbiór określonych na przedziale $[t_0, T_0]$ rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (5.1) pokrywają się.

Twierdzenie 6.1. *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Ustalmy* $T_0 \in (t_0, t_0^*)$. *Jeżeli* $\mathscr{Lim} \neq \emptyset$, *to każda funkcja* $u\colon [t_0, T_0] \to X$ *należąca do zbioru* $\mathscr{Lim}$ *jest rozwiązaniem lokalnym zagadnienia* (5.1). *Ponadto,* $u(t) \in D_0$ *dla dowolnego* $t \in [t_0, T_0]$

Dowód. Niech $u\colon [t_0, T_0] \to X$ należy do zbioru $\mathscr{Lim}$ i niech $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb z przedziału $(0, 1]$ takim, że $\varepsilon_n \to 0^+$ i $\|u_{\varepsilon_n} - u\|_\infty \to 0$, gdy $n \to +\infty$.

Druga część tezy jest natychmiastowa. Ponieważ $\operatorname{dist}(u_{\varepsilon_n}(t), D_0) \leqslant \varepsilon_n$ (por. Tw. 5.6 d)), to z domkniętości D_0 wnioskujemy, iż $u(t) \in D_0$ dla wszystkich $t \in [t_0, T_0]$.

Jeśli oznaczymy $v = K(u)$ oraz $v_n = K(u_n)$, gdzie $u_n = u_{\varepsilon_n}$, to wykazanie pierwszej części na mocy Uwagi 6.1 sprowadzi się do pokazania, iż $u = v$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ na mocy Uwagi 5.8 dla wszystkich $t \in (t_i, t_{i+1})$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ mamy

$$\|u_n'(t) - v_n'(t)\| = \|u_n'(t) - F(t, u_n(t))\| < 2\varepsilon_n. \tag{6.1}$$

Stąd na podstawie Twierdzenia 1.9 oraz Założenia Szczegółowego (S3) dla wszystkich $t \in [t_0, T_0]$ zachodzi nierówność $\|u_n(t) - v_n(t)\| \leqslant 2\varepsilon_n(t - t_0) \leqslant 2\varepsilon_n(T_0 - t_0) \leqslant \varepsilon_n$, czyli $\|u_n - v_n\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, a zatem $\|v_n - u\|_\infty \to 0$, gdy $n \to +\infty$.

Jeśli pokażemy, że $v_n \to v$ jednostajnie na przedziale $[t_0, T_0]$, to wtedy z jednoznaczności granicy na podstawie uwagi poczynionej na początku dowodu, uzyskamy tezę. Zauważmy, iż wystarczy udowodnić, że $F(t, u_n(t)) \rightrightarrows F(t, u(t))$ na $[t_0, T_0]$, ponieważ wtedy

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[t_0,T_0]} \left\| \int_{t_0}^t F(s, u_n(s))ds - \int_{t_0}^t F(s, u(s))ds \right\| \\
&\leqslant \sup_{t\in[t_0,T_0]} \int_{t_0}^t \|F(s, u_n(s)) - F(s, u(s))\| ds \\
&\qquad \leqslant (T_0 - t_0)\|F(\cdot, u_n(\cdot)) - F(\cdot, u(\cdot))\|_\infty,
\end{aligned}$$

czyli $v_n = K(u_n)$ będzie dążyć do $v = K(u)$ w normie supremalnej.

Przypuśćmy nie wprost, iż istnieje takie $\eta > 0$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $\tau_n \in [t_0, T_0]$ takie, że

$$\|F(\tau_n, u_n(\tau_n)) - F(\tau_n, u(\tau_n))\| \geqslant \eta. \tag{6.2}$$

Ze zwartości przedziału $[t_0, T_0]$ bez straty ogólności możemy założyć, że ciąg $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnego $\tau \in [t_0, T_0]$. Na podstawie definicji funkcji $u(t)$ oraz Twierdzenia 5.6 c) otrzymujemy nierówność

$$\|u_n(\tau_n) - u(\tau)\| \leqslant \|u_n(\tau_n) - u_n(\tau)\| + \|u_n(\tau) - u(\tau)\| \leqslant (M + 1)|\tau_n - \tau| + \|u_n(\tau) - u(\tau)\|,$$

czyli $u_n(\tau_n) \to u(\tau)$, a więc także $(\tau_n, u_n(\tau_n)) \to (\tau, u(\tau))$, gdy $n \to +\infty$. Jednakże wtedy z ciągłości funkcji $F(t, x)$ mamy $\|F(\tau_n, u_n(\tau_n)) - F(\tau_n, u(\tau_n))\| \to 0$, co prowadzi do sprzeczności z (6.2). Tym samym dowód można uznać za ukończony. □

Twierdzenie 6.1 mówi, iż odpowiedź twierdząca na pytanie o istnienie rozwiązania lokalnego zagadnienia Cauchy'ego (5.1) jest możliwa w przypadku, gdy zbiór $\mathscr{Lim}$ jest niepusty.

Przykład 6.1. Na podstawie Twierdzenia 5.6 zbiór $\mathscr{App}$ jest jednakowo ciągły oraz wspólnie ograniczony. Jeżeli więc przestrzeń Banacha X jest skończenie wymiarowa, tzn. $X = \mathbb{R}^d$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$, to na mocy Lematu 1.2 znajdziemy ciąg $\varepsilon_n \to 0^+$ taki, że odpowiadający mu ciąg rozwiązań przybliżonych $(u_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[t_0, T_0]$ do pewnego $u \in C([t_0, T_0], \mathbb{R}^d)$. Tym samym zbiór $\mathscr{Lim}$ jest niepusty, a funkcja u na podstawie Twierdzenia 6.1 jest rozwiązaniem zagadnienia (5.1).

Definicja 6.1. Podzbiór D przestrzeni unormowanej X nazywamy lokalnie wypukłym, gdy dla każdego $x \in D$ istnieje promień $r = r(x) > 0$ taki, że $D \cap B_X(x, r)$ jest zbiorem wypukłym.

Uwaga 6.2. Oczywiście każdy zbiór wypukły w przestrzeni unormowanej jest lokalnie wypukły. Co więcej, każdy zbiór otwarty w przestrzeni unormowanej jest lokalnie wypukły (por. Uw. 5.2).

Twierdzenie 6.2. *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Załóżmy ponadto, że zbiór D jest lokalnie wypukły, czyli bez straty ogólności możemy przyjąć, iż D_0 jest wypukły* (*por. str. 41*). *Jeśli istnieje funkcja ciągła $L\colon (t_0^1, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ silnie normalna na przedziale (t_0^1, t_0^2)* (*por. Def. 4.1*) *oraz taka, że*

$$[x - y, f(t, x) - f(t, y)]_i \leqslant L(t, \|x - y\|) \quad \text{dla } t \in (t_0^1, t_0^2) \text{ oraz } x, y \in D, \tag{6.3}$$

to wtedy zagadnienie (5.1) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie u, określone na przedziale $[t_0, T_0]$ dla pewnego $t_0 < T_0 < t_0^2$. Ponadto, $u(t) \in D_0$ dla dowolnego $t \in [t_0, T_0]$.*

Dowód. Niech $\gamma > 0$ będzie ustalone. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 4.1 możemy skonstruować rodzinę $\{\varphi_\xi\colon [t_0, t_\gamma) \to [0, \infty) : 0 < \xi \leqslant \gamma\}$ rozwiązań maksymalnych zagadnień $(4.1)_{(t_0,\xi)}$, gdzie $\xi \in (0, \gamma]$ o własności (4.4), określonych na wspólnym przedziale istnienia $[t_0, t_\gamma)$. Jak poprzednio (por. str. 29) przedział $[t_0, t_\gamma)$ $(t_0 < t_\gamma)$ jest maksymalnym przedziałem istnienia (na prawo od t_0) rozwiązania maksymalnego φ_γ zagadnienia początkowego $(4.1)_{(t_0,\gamma)}$.

Wybierzmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$. Bez straty ogólności możemy założyć, iż $T_0 \in [t_0, t_\gamma)$, gdyż t_0^* można wybrać jako element przedziału $[t_0, t_\gamma)$ (por. str. 41).

Naszym celem będzie wykazanie, iż rodzina $\mathscr{App}$ spełnia kryterium Cauchy'ego:

$$\forall\ \eta > 0\ \exists\ \tau \in (0, 1) \quad 0 < \varepsilon,\ \delta < \tau \Rightarrow \|u_\varepsilon - u_\delta\|_\infty < \eta, \tag{6.4}$$

co wraz z zupełnością przestrzeni $C([t_0, T_0], X)$ będzie implikować niepustość zbioru $\mathscr{Lim}$. Tym samym, na mocy Twierdzenia 6.1 zagadnienie (5.1) będzie posiadać rozwiązanie o wartościach w zbiorze $D_0 \subset D$.

Ponieważ zbiór D_0 jest wypukły, więc $u_\beta(t) \in D_0$ dla wszystkich $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$ oraz $0 < \beta < 1$, jako krzywa łamana o wierzchołkach ze zbioru D_0.

Ustalmy $\eta > 0$ i oznaczmy $\mu = \frac{1}{2}\nu(\eta)$ oraz $\tau = \frac{1}{4}\mu$, gdzie $\nu(\eta)$ jest wielkością wprowadzoną w Twierdzeniu 4.1. Dla $\varepsilon, \delta \in (0, \tau)$ zdefiniujmy ciągłą funkcję $\varphi\colon [t_0, T_0) \to [0, +\infty)$ wzorem $\varphi(t) = \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|$. Sprawdzimy, iż dla funkcji φ spełnione są założenia Twierdzenia 4.2. Symbolem $N_{\varepsilon,\delta}$ oznaczmy zbiór będący sumą mnogościową zbiorów, których elementami są odcięte węzłów dla rozwiązań przybliżonych u_ε i u_δ, tj. $N_{\varepsilon,\delta} = \{t_i^\varepsilon : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{t_j^\delta : j \in \mathbb{N}_0\}$. Ponieważ dla $\lambda < 0$ oraz $t \in [t_0, T_0) \setminus N_{\varepsilon,\delta}$ zachodzi poniższa nierówność

$$\begin{aligned}
&\big\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t) + \lambda\big(u_\varepsilon'(t) - u_\delta'(t)\big)\big\| \\
&\quad\geqslant \big\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t) + \lambda\big[f\big(t, u_\varepsilon(t)\big) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\big]\big\| \\
&\qquad - |\lambda| \big\|u_\varepsilon'(t) - u_\delta'(t) - f\big(t, u_\varepsilon(t)\big) + f\big(t, u_\delta(t)\big)\big\| \\
&\qquad\quad \geqslant \big\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t) + \lambda\big[f\big(t, u_\varepsilon(t)\big) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\big]\big\| \\
&\qquad\qquad + \lambda\big\|u_\varepsilon'(t) - f\big(t, u_\varepsilon(t)\big)\big\| + \lambda\big\|u_\delta'(t) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\big\|,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

więc dla $t \in [t_0, T_0) \setminus N_{\varepsilon,\delta}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\Big(\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t) + \lambda(u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t))\| - \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|\Big)\\
&\qquad\leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t) + \lambda\big[f\big(t, u_\varepsilon(t)\big) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\big]\| - \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|\Big)\\
&\qquad\qquad + \|u'_\varepsilon(t) - f\big(t, u_\varepsilon(t)\big)\| + \|u'_\delta(t) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\|.
\end{aligned}
$$

Stąd na podstawie założeń, Uwagi 5.8 oraz Twierdzenia 3.3 dla $t \in (t_0, T_0) \setminus N_{\varepsilon,\delta}$ mamy

$$
\begin{aligned}
\Lambda^-\varphi(t) &= [u_\varepsilon(t) - u_\delta(t), u'_\varepsilon(t) - u'_\delta(t)]_i\\
&\leqslant \big[u_\varepsilon(t) - u_\delta(t), f\big(t, u_\varepsilon(t)\big) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\big]_i + \|u'_\varepsilon(t) - f\big(t, u_\varepsilon(t)\big)\| + \|u'_\delta(t) - f\big(t, u_\delta(t)\big)\|\\
&\leqslant L(t, \|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\|) + 2\varepsilon + 2\delta \leqslant L\big(t, \varphi(t)\big) + \mu.
\end{aligned}
$$

Ponadto $\varphi(t_0) = \|u_\varepsilon(t_0) - u_\delta(t_0)\| = \|x_0 - x_0\| = 0 \leqslant \mu$. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że funkcja $\varphi(t)$ jest (lokalnie) lipschitzowska na przedziale $[t_0, T_0)$. Istotnie, niech $s, t \in [t_0, T_0)$; wtedy na podstawie Twierdzenia 5.6 c) otrzymujemy:

$$
\big|\varphi(t) - \varphi(s)\big| \leqslant \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\| + \|u_\delta(t) - u_\delta(s)\| \leqslant 2(M+1)|t-s|.
$$

Ponieważ założenia Twierdzenia 4.2 są spełnione, więc dla wszystkich $\nu \in (\mu, \gamma)$ oraz wszystkich $t_0 \leqslant t < T_0$ zachodzi $\varphi(t) \leqslant \varphi_\nu(t)$. W szczególności powyższa nierówość jest prawdziwa dla liczby $\nu_0 = \frac{3}{4}\nu(\eta) \in (\mu, \gamma)$, czyli w świetle Twierdzenia 4.1 mamy $\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\| \leqslant \varphi_{\nu_0}(t) \leqslant \eta$ dla $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$. Tym samym wykazaliśmy, iż warunek (6.4) zachodzi.

Na koniec przypuśćmy, iż istnieje funkcja v określona na przedziale $[t_0, \tau_0]$, gdzie $\tau_0 \in (t_0, T_0]$ i taka, że $v(t_0) = x_0$ oraz $v'(t) = f\big(t, v(t)\big)$ dla $t \in [t_0, \tau_0]$. Zdefiniujmy odwzorowanie ciągłe $\varphi\colon [t_0, \tau_0) \to [0, +\infty)$ wzorem $\varphi(t) = \|u(t) - v(t)\|$. Rozumując analogicznie jak w pierwszej części dowodu, otrzymujemy: $\varphi(t_0) = 0$ oraz $\Lambda^-\varphi(t) \leqslant L\big(t, \varphi(t)\big)$ dla (prawie) wszystkich $t \in (t_0, \tau_0)$. Ponadto, $\varphi(t)$ jest (lokalnie) lipschitzowska na przedziale $[t_0, \tau_0]$. Istotnie, dla $a = u, v$ oraz $t, s \in [t_0, \tau_0]$ mamy

$$
\|a(t) - a(s)\| \leqslant \left|\int_t^s \big\|f\big(z, a(z)\big)\big\|\, dz\right| \leqslant N_a|t-s|,
$$

gdzie $N_a > 0$ jest taką liczbą, że $\big\|f\big(t, a(t)\big)\big\| \leqslant N_a$ dla $t \in [t_0, \tau_0]$. (Liczba N_a istnieje z uwagi na ciągłość funkcji $t \mapsto f\big(t, a(t)\big)$ dla $t \in [t_0, \tau_0]$.) Wybierzmy dowolne $\eta > 0$ i niech $\mu = \frac{1}{2}\nu(\eta)$. Wtedy na mocy Twierdzenia 4.1 oraz Twierdzenia 4.2 dla wszystkich $t \in [t_0, \tau_0]$ spełniona będzie nierówność: $\|u(t) - v(t)\| \leqslant \eta$. Z dowolności $\eta > 0$, wnioskujemy, iż $u = v$. □

Uwaga 6.3. Powyższe twierdzenie, w świetle przyjętych założeń, orzeka również, iż możliwe jest przedłużenie (prawostronnego) rozwiązania $x\colon [t_0, T_0] \to D$ zagadnienia Cauchy'ego $(5.1)_{(t_0,x_0)}$ na pewien przedział postaci $[t_0, b]$, gdzie $T_0 < b < t_0^2$. W tym celu zauważmy, że wystarczy w miejsce zagadnienia początkowego $(5.1)_{(t_0,x_0)}$ rozpatrzeć zagadnienie $(5.1)_{(T_0,x(T_0))}$ i zastosować Twierdzenie 6.2. (Oczywiście wszystkie założenia Twierdzenia 6.2 są spełnione.) Oznaczając przez $y(t)$ (prawostronne) rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego $(5.1)_{(T_0,x(T_0))}$, jako rozwiązanie (prawostrone) zagadnienia $(5.1)_{(t_0,x_0)}$ określone na przedziale $[t_0, b]$ wystarczy następnie przyjąć funkcję $z\colon [t_0, b] \to D$ zdefiniowaną wzorem:

$$
z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{dla } t \in [t_0, T_0),\\ y(t) & \text{dla } t \in [T_0, b]. \end{cases}
$$

Na zakończenie niniejszego rozdziału podamy przykład zastosowania Twierdzenia 6.2 w teorii prawdopodobieństwa. Przy wykazywaniu, iż założenia Twierdzenia 6.2 są spełnione skorzystamy z następującego lematu, który zacytujemy bez dowodu.

Lemat 6.1. *Niech D będzie domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Ponadto niech $x \in \partial D$ oraz $z \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

a) $\lim_{\lambda \to 0^+} \dfrac{1}{\lambda} \operatorname{dist}\bigl(x + \lambda z, D\bigr) = 0$;

b) *dla dowolnego $x^* \in X^*$, jeżeli $x^*(x) = \sup_{y \in D} x^*(y)$, to $x^*(z) \leqslant 0$.*

Uwaga 6.4. Warunek b) z Lematu 6.1 jest oczywiście równoważny warunkowi: dla dowolnego $x^* \in X^*$, jeżeli $x^*(x) = \inf_{y \in D} x^*(y)$, to $x^*(z) \geqslant 0$. Z kolei powyższy warunek, w przypadku gdy D jest *klinem* K, tzn. zbiorem domkniętym, wypukłym oraz zamkniętym na mnożenie przez nieujemne skalary, jest równoważny warunkowi: dla dowolnego $x^* \in K^*$, gdzie K^* jest *klinem dualnym*, tzn. $K^* = \{x^* \in X^* : x^*(w) \geqslant 0 \text{ dla każdego } w \in K\}$, jeżeli $x^*(x) = 0$, to $x^*(z) \geqslant 0$. Istotnie, wystarczy wykazać, że $c = \inf_{y \in K} x^*(y) = 0$ dla dowolnego $x^* \in X^*$. Gdyby $c < 0$, to istniałoby takie $y_0 \in K$, że $x^*(y_0) < 0$. A zatem z definicji K byłoby także: $x^*(\lambda y_0) < 0$ dla dowolnego $\lambda > 0$. Stąd $x^*(\lambda y_0) \to -\infty$, gdy $\lambda \to +\infty$, co przeczy ograniczoności z dołu x^* na zbiorze K. Ponadto, dla $0 \in K$ mamy $x^*(0) = 0$. Tym samym $c = 0$.

Przykład 6.2. Załóżmy, że na pewnej przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) daną mamy rodzinę zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$, które przybierają wartości w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Przez $\xi_i(t) = P\bigl(X_t = i\bigr)$ oznaczmy prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa X_t znajduje się w stanie i. Możemy zatem zpisać

$$\xi_i(t+h) = \sum_{j=1}^{\infty} P\bigl(X_{t+h} = i | X_t = j\bigr)\xi_j(t), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{6.6}$$

gdzie $P\bigl(X_{t+h} = i | X_t = j\bigr)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe. Jeżeli założymy, że dla wszystkich h bliskich zeru mamy $(i, j \in \mathbb{N})$

$$P\bigl(X_{t+h} = i | X_t = j\bigr) = \begin{cases} a_{ij} h + o(h) & \text{dla } i \neq j, \\ 1 - a_{jj} h + o(h) & \text{dla } i = j, \end{cases}$$

gdzie $o(\cdot)$ oznacza małe „o” Landaua, $a_{ij} \geqslant 0$ i $\sum_{i \neq j} a_{ij} = a_{jj}$, to z (6.6) formalnie otrzymujemy układ przeliczalnie wielu równań różniczkowych

$$\xi_i'(t) = -a_{ii}\xi_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}\xi_j(t), \qquad \xi_i(0) = c_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

Przy czym przyjmujemy, iż $c_i \geqslant 0$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$. Układ (6.7) możemy przepisać w postaci

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = c, \tag{6.8}$$

gdzie

$$\begin{gathered} Ax(t) = \Bigl(-a_{11}\xi_1(t) + \sum_{j=2}^{\infty} a_{1j}\xi_j(t),\ a_{21}\xi_1(t) - a_{22}\xi_2(t) + \sum_{j=3}^{\infty} a_{2j}\xi_j(t),\ \ldots\Bigr) \\ x(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t),\ \ldots) \qquad \text{oraz} \qquad c = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \end{gathered} \tag{6.9}$$

Ponieważ przy ustalonym $t \geqslant 0$ funkcje $\xi_i(t)$ ($i \in \mathbb{N}$) powinny być prawdopodobieństwami, więc dla zagadnienia początkowego (6.8) będziemy poszukiwać rozwiązania x o wartościach w przestrzeni Banacha l^1, które posiada następujące własności:

(i) x jest określone na przedziale $[0, b)$ dla pewnego $b > 0$;

(ii) $x(t) \in K = \{y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1 : \eta_i \geqslant 0 \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$ dla każdego $t \in [0, b)$;

(iii) $\|x(t)\|_1 = 1$ dla każdego $t \in [0, b)$.

Zauważmy, iż jeśli tylko znajdziemy rozwiązanie x spełniające warunki (i) oraz (ii), to automatycznie będzie ono spełniać (iii). Istotnie, na mocy twierdzenia o różniczkowaniu sumy szeregu funkcyjnego dla $t \in (0, b)$ mamy:

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i'(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}\xi_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty} a_{ij}\Big)\xi_j(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1,$$

a zatem $\|x(t)\|_1 = 1$ dla $t \in [0, b)$.

Załóżmy, że $\sup_{j\in\mathbb{N}} a_{jj} < +\infty$. Wtedy operator liniowy $A\colon l^1 \to l^1$ zdefiniowany wzorem (6.9) dla $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$ jest ograniczony. (Tak naprawdę warunek $\sup_{j\in\mathbb{N}} a_{jj} < +\infty$ jest równoważny ograniczoności operatora A.)

Sprawdzimy, iż pozostałe założenia Twierdzenia 6.2 dla odwzorowania $A\colon K \to l^1$ są również spełnione. Oczywiście K jest zbiorem lokalnie domkniętym oraz lokalnie wypukłym (por. Uw. 5.1 oraz Uw. 6.2). Ponieważ na podstawie Twierdzenia 3.3 b) mamy

$$[x - y, Ax - Ay]_i \leqslant \|A(x - y)\|_1 \leqslant \|A\|\,\|x - y\|_1\,,$$

więc wystarczy przyjąć $L(t, u) = \|A\|\,u$. (Oczywiście funkcja $(t, u) \mapsto \|A\|\,u$ jest silnie normalna.)

W celu wykazania warunku $(O1)$ skorzystamy z Lematu 6.1, Uwagi 6.4 oraz Uwagi 5.3. Niech $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \partial K$ oraz $z^* = (\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^*$, gdzie $K^* = \{z^* = (\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \zeta_i \geqslant 0 \text{ dla } i \in \mathbb{N}\}$. Załóżmy, że $z^*(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i\eta_i = 0$. Wtedy

$$z^*(Ay) = \sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i(Ay)_i = \sum_{i=1}^{\infty}\zeta_i\Big(-a_{ii}\eta_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} a_{ij}\eta_j\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} a_{ij}\zeta_i\eta_j \geqslant 0.$$

Tym samym wszystkie założenia Twierdzenia 6.2 są spełnione, a zatem istnieje rozwiązanie (lokalne) zagadnienia Cauchy'ego (6.8) o żądanych własnościach (i)–(iii).

Uwagi

Obydwa twierdzenia zaprezentowane w Rozdziale 6, a także Przykład 6.1 oraz Definicja 6.1 pochodzą z [30]. Czytelnik zainteresowany twierdzeniami o istnieniu rozwiązań (lokalnych) zagadnienia Cauchy'ego $(5.1)_{(t_0,x_0)}$ podobnymi do Twierdzenia 6.2 znajdzie je m.in. w [6] (Rozdział 4, Paragraf 3), [22] oraz [20] (Rozdział 7, Paragraf 6). W [22] Martin przyjmuje, że funkcja $L\colon (t_0^1, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z warunku (6.3) jest postaci $L(t, x) = l(t)x$ dla pewnej funkcji ciągłej $l\colon (t_0^1, t_0^2) \to \mathbb{R}$. Deimling w [6] przyjmuje natomiast, iż funkcja $L\colon (t_0, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest tzw. klasy U_1 (zob. [6] Rozdział 3, Paragraf 3). W szczególności więc L może być postaci $L(t, x) = lx$, gdzie $l \in \mathbb{R}$ (warunek jedyności Lipschitza) czy $L(t, x) = x/(t - t_0)$ dla $t > t_0$ (warunek jedyności Nagumo). Lemat 6.1 oraz Przykład 6.2 zaczerpnięte zostały z [6] (Rozdział 4). Uwaga 6.4 pochodzi również z [6] (Rozdział 4), gdzie jest częścią Przykładu 4.1.

Rozdział 7

Istnienie rozwiązań w dziedzinach niewypukłych

W Rozdziale 6 podaliśmy warunki wystarczające, no to by istniało (prawostronne) rozwiązanie lokalne zagadnienia początkowego Cauchy'ego (5.1) o wartościach w zbiorze lokalnie wypukłym D. W niniejszym rozdziale udowodnimy odpowiednik Twierdzenia 6.2. Tym razem jednak nie będziemy zakładać lokalnej wypukłości zbioru D, a iloczyn półskalarny dolny w warunku (6.3) zastąpimy iloczynem półskalarnym górnym. Niniejszy rozdział rozpoczniemy od rozważań dotyczących układu węzłów dla pary $\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ rozwiązań przybliżonych zagadnienia (5.1).

* * *

Niech Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe będą spełnione. Ustalmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$. W świetle Twierdzenia 5.5 dla $\varepsilon, \delta \in (0,1]$ istnieją ciągi węzłów przybliżonych odpowiadające zagadnieniu początkowemu Cauchy'ego (5.1): $\big((t_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ oraz $\big((t_j^\delta, x_j^\delta)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$.

Oznaczmy $N_{\varepsilon,\delta} = \{t_i^\varepsilon : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{t_j^\delta : j \in \mathbb{N}_0\}$ i połóżmy

$$s_0 = t_0, \quad s_{k+1} = \min\{t \in N_{\varepsilon,\delta} : t > s_k\} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}_0.$$

Jeśli przyjmiemy $i(k) = \max\{i \in \mathbb{N}_0 : t_i^\varepsilon \leqslant s_k\}$ oraz $j(k) = \max\{j \in \mathbb{N}_0 : t_j^\delta \leqslant s_k\}$, to dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$ będzie

$$s_k = \max\{t_{i(k)}^\varepsilon, t_{j(k)}^\delta\}, \qquad s_{k+1} = \min\{t_{i(k)+1}^\varepsilon, t_{j(k)+1}^\delta\}.$$

W szczególności $s_k < s_{k+1}$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, będące odpowiednikiem Twierdzenia 5.5.

Twierdzenie 7.1. *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Ustalmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ i przyjmijmy powyższe oznaczenia. Wybierzmy dowolne $k \in \mathbb{N}_0$ oraz punkty początkowe $y_k^\varepsilon, y_k^\delta \in D_0$ takie, że*

$$\|y_k^\varepsilon - x_{i(k)}^\varepsilon\| \leqslant (M+1)\big(s_k - t_{i(k)}^\varepsilon\big) \tag{7.1}$$

oraz

$$\|y_k^\delta - x_{j(k)}^\delta\| \leqslant (M+1)\big(s_k - t_{j(k)}^\delta\big). \tag{7.2}$$

Załóżmy ponadto, iż dla pewnej ciągłej funkcji $L\colon (t_0^1, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *która jest silnie normalna na przedziale* (t_0^1, t_0^2) *zachodzi*

$$\big[x - y, f(t,x) - f(t,y)\big]_s \leqslant L(t, \|x-y\|) \quad \text{dla } t \in (t_0^1, t_0^2) \text{ oraz } x, y \in D. \tag{7.3}$$

Wtedy istnieje układ (ciąg) węzłów dla pary aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ *na przedziale* $[s_k, s_{k+1})$, *gdzie* u_ε *i* u_δ *są rozwiązaniami przybliżonymi zagadnienia* (5.1); *tj. istnieją:*

a) *sciśle rosnący ciąg* $(s_{k,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *o elementach z* $[s_k, s_{k+1})$ *i zerowym wyrazie* $s_{k,0} = s_k$, *zbieżny do* s_{k+1}, *gdy* $n \to +\infty$;

b) *ciąg* $\big(y_{k,n}^\varepsilon\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *o elementach ze zbioru* D_0 *i zerowym wyrazie* $y_{k,0}^\varepsilon = y_k^\varepsilon$;

c) *ciąg* $\big(y_{k,n}^\delta\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *o elementach ze zbioru* D_0 *i zerowym wyrazie* $y_{k,0}^\delta = y_k^\delta$;

takie, że dla każdego indeksu $n \in \mathbb{N}_0$:

(i) $\|y_{k,n}^\gamma - y_{k,n+1}^\gamma + (s_{k,n+1} - s_{k,n}) f(s_{k,n}, y_{k,n}^\gamma)\| \leqslant \gamma(s_{k,n+1} - s_{k,n})$, *gdzie* $\gamma = \varepsilon, \delta$;

(ii) *dla dowolnych punktów* $(t, y^{(1)}), (t, y^{(2)}) \in \mathbb{R} \times X$ *takich, że* $t \in [s_{k,n}, s_{k,n+1}]$ *oraz* $\max\{\|y^{(1)} - y_{k,n}^\varepsilon\|, \|y^{(2)} - y_{k,n}^\delta\|\} \leqslant (M+1)(s_{k,n+1} - s_{k,n})$ *zachodzi*

$$\big[y^{(1)} - y^{(2)}, F(t, y^{(1)}) - F(t, y^{(2)})\big]_i \leqslant L(t, \|y^{(1)} - y^{(2)}\|) + \varepsilon + \delta.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji zupełnej względem wskaźnika n. Jako zerowe wyrazy ciągów przyjmijmy $s_{k,0} = s_k$, $y_{k,0}^\varepsilon = y_k^\varepsilon$ oraz $y_{k,0}^\delta = y_k^\delta$ i załóżmy, iż ciąg skończony $\big\{(s_{k,m}, y_{k,m}^\varepsilon, y_{k,m}^\delta)\colon 0 \leqslant m \leqslant n\big\}$, gdzie $n \geqslant 0$ został skonstruowany tak, by spełniał warunki (i) i (ii) aż do indeksu $(n-1)$ włącznie oraz by $s_{k,n} < s_{k+1}$. W przypadku, gdy $n = 0$ zakładamy, iż warunki (i) i (ii) są spełnione. Połóżmy

$$\theta_{k,n} = \frac{1}{M+1} \min\{s_{k+1} - s_k, \Delta(F, L, \varepsilon + \delta, s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta)\} \tag{7.4}$$

oraz

$$s_{k,n+1} = s_{k,n} + \theta_{k,n} \tag{7.5}$$

i rozważmy zbiór

$$Z^2(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta) = Z(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\varepsilon) \times Z(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\delta),$$

gdzie zbiór $Z(\tau, \upsilon, \omega)$ został wprowadzony w dowodzie Twierdzenia 5.5 na stronie 43.

W $Z^2(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta)$ wprowadźmy relację częściowego porządku (por. dowód Tw. 5.5)

$$\begin{aligned} &((t',x'),(t'',x'')) \preccurlyeq ((s',y'),(s'',y'')) \iff \\ &\iff t' \leqslant s' \ \wedge \ \Big\|x' - y' + (s'-t') f(s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon)\Big\| \leqslant \varepsilon(s'-t') \ \wedge \\ &\wedge \ t'' \leqslant s'' \ \wedge \ \Big\|x'' - y'' + (s''-t'') f(s_{k,n}, y_{k,n}^\delta)\Big\| \leqslant \delta(s''-t''). \end{aligned}$$

Rozumując analogicznie jak na stronie 44 można pokazać, iż zbiór $Z^2(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta)$ jest silnie porządkowo zwarty (por. Def. 5.3), a zatem na mocy Twierdzenia 5.1, dla elementu $\big((s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon), (s_{k,n}, y_{k,n}^\delta)\big)$ znajdziemy w zbiorze $Z^2(s_{k,n}, s_{k,n+1}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta)$ taki element maksymalny $\big((s^\varepsilon, y^\varepsilon), (s^\delta, y^\delta)\big)$, że $\big((s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon), (s_{k,n}, y_{k,n}^\delta)\big) \preccurlyeq \big((s^\varepsilon, y^\varepsilon), (s^\delta, y^\delta)\big)$.

Twierdzimy, że $s^\varepsilon = s^\delta = s_{k,n+1}$. Przypuśćmy, iż jest inaczej, tzn. $s^\varepsilon < s_{k,n+1}$ lub $s^\delta < s_{k,n+1}$. Bez straty ogólności, możemy przyjąć, że $s^\varepsilon < s_{k,n+1}$. Zauważmy najpierw, iż $(s^\varepsilon, y^\varepsilon) \in Z(t_0, x_0)$. Istotnie, $s^\varepsilon \in [s_{k,n}, s_{k,n+1}] \subset [t_0, t_0^*)$, a ponadto na podstawie założeń oraz Twierdzenia 5.5 otrzymujemy (w przypadku, gdy $n = k = 0$ przyjmujemy, iż odpowienie sumy równają się zeru)

$$\begin{aligned}
\|y^\varepsilon - x_0\| &\leqslant \|y^\varepsilon - x^\varepsilon_{i(k)}\| + \sum_{p=0}^{i(k)-1} \|x^\varepsilon_{p+1} - x^\varepsilon_p\| \\
&\leqslant \|y^\varepsilon - y^\varepsilon_{k,n}\| + \sum_{p=0}^{n-1} \|y^\varepsilon_{k,p+1} - y^\varepsilon_{k,p}\| + \|y^\varepsilon_{k,0} - x^\varepsilon_{i(k)}\| + \sum_{p=0}^{i(k)-1} \|x^\varepsilon_{p+1} - x^\varepsilon_p\| \\
&\leqslant \|y^\varepsilon - y^\varepsilon_{k,n} + (s^\varepsilon - s_{k,n}) f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\| + (s^\varepsilon - s_{k,n}) \|f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\| \\
&\quad + \sum_{p=0}^{n-1} \|y^\varepsilon_{k,p+1} - y^\varepsilon_{k,p} + (s_{k,p+1} - s_{k,p}) f(s_{k,p}, y^\varepsilon_{k,p})\| \\
&\quad + \sum_{p=0}^{n-1} (s_{k,p+1} - s_{k,p}) \|f(s_{k,p}, y^\varepsilon_{k,p})\| + \|y^\varepsilon_{k,0} - x^\varepsilon_{i(k)}\| \\
&\quad + \sum_{p=0}^{i(k)-1} \|x^\varepsilon_{p+1} - x^\varepsilon_p + (t^\varepsilon_{p+1} - t^\varepsilon_p) f(t^\varepsilon_p, x^\varepsilon_p)\| \qquad (7.6) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{i(k)-1} (t^\varepsilon_{p+1} - t^\varepsilon_p) \|f(t^\varepsilon_p, x^\varepsilon_p)\| \\
&\leqslant (M + \varepsilon)(s^\varepsilon - s_{k,n}) + (M + \varepsilon) \sum_{p=0}^{n-1} (s_{k,p+1} - s_{k,p}) \\
&\quad + (M + 1)(s_k - t^\varepsilon_{i(k)}) + (M + \varepsilon) \sum_{p=0}^{i(k)-1} (t^\varepsilon_{p+1} - t^\varepsilon_p) \\
&\leqslant (M + 1)(s^\varepsilon - t_0) \leqslant (M + 1)(t_0^* - t_0) \\
&\leqslant r_0.
\end{aligned}$$

Stąd na podstawie Twierdzenia 5.4 mamy:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{dist}\big(s^\varepsilon + \lambda f(s^\varepsilon, y^\varepsilon), D_0\big) = 0.$$

Zauważmy, iż związki

$$s_{k,n} < s_{k+1} \qquad \text{oraz} \qquad \theta_{k,n} \leqslant \frac{1}{M+1}(s_{k+1} - s_{k,n})$$

prowadzą do następującego oszacowania

$$s_{k,n+1} = s_{k,n} + \theta_{k,n} \leqslant s_{k,n} + \frac{1}{M+1}(s_{k+1} - s_{k,n}) = \frac{M}{M+1} s_{k,n} + \frac{1}{M+1} s_{k+1} < s_{k+1}, \qquad (7.7)$$

a zatem na mocy rozważań poprzedzających niniejsze twierdzenie $s^\varepsilon < s_{k+1} \leqslant t^\varepsilon_{i(k)+1}$. W oparciu o poniższe nierówności (które otrzymujemy analogicznie jak (7.6))

$$\|y^\varepsilon - x^\varepsilon_{i(k)}\| \leqslant (M + 1)(s^\varepsilon - t^\varepsilon_{i(k)}) \leqslant (M + 1)(t^\varepsilon_{i(k)+1} - t^\varepsilon_{i(k)})$$

oraz

$$\|y^\varepsilon_{k,n} - x^\varepsilon_{i(k)}\| \leqslant (M+1)(s_{k,n} - t^\varepsilon_{i(k)}) \leqslant (M+1)(t^\varepsilon_{i(k)+1} - t^\varepsilon_{i(k)}), \tag{7.8}$$

na mocy Twierdzenia 5.5 (iii) mamy więc

$$\left\|f(s^\varepsilon, y^\varepsilon) - f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\right\| = \left\|F(s^\varepsilon, y^\varepsilon) - F(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\right\| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Postępując dalej jak w dowodzie Twierdzenia 5.5 na stronie 43 dochodzimy do sprzeczności. Tym samym $s^\varepsilon = s^\delta = s_{k,n+1}$. Kładąc $y^\varepsilon_{k,n} := y^\varepsilon$ oraz $y^\delta_{k,n} := y^\delta$ na mocy faktu, iż $\big((s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}), (s_{k,n}, y^\delta_{k,n})\big) \preccurlyeq \big((s^\varepsilon, y^\varepsilon), (s^\delta, y^\delta)\big)$ stwierdzamy, że warunek (i) zachodzi także dla n-tego indeksu. Ponadto dla dowolnych punktów $(t, y^{(1)}), (t, y^{(2)}) \in \mathbb{R} \times X$ takich, że $t \in [s_{k,n}, s_{k,n+1}]$ oraz $\max\{\|y^{(1)} - y^\varepsilon_{k,n}\|, \|y^{(2)} - y^\delta_{k,n}\|\} \leqslant (M+1)(s_{k,n+1} - s_{k,n})$ w świetle definicji liczby $\theta_{k,n}$ i założenia (7.3), na mocy Przykładu 3.5 otrzymujemy

$$\big[y^{(1)} - y^{(2)}, F(t, y^{(1)}) - F(t, y^{(2)})\big]_i \leqslant L(t, \|y^{(1)} - y^{(2)}\|) + \varepsilon + \delta.$$

Tym samym również i warunek (ii) zachodzi dla n-tego indeksu.

Zauważmy, iż proces wyboru kolejnych elementów ciągu $\big((s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n})\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ może być kontynuowany w nieskończoność (por. (7.7)).

Rozumując analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 5.5 można uzasadnić, iż ciąg węzłów $\big((s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n})\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jest zbieżny do pewnego elenentu $(s_{k,\infty}, y^\varepsilon_{k,\infty}, y^\delta_{k,\infty}) \in [t_0, T_0] \times D_0 \times D_0$. Pozostaje nam udowodnić, że $s_{k,\infty} = s_{k+1}$. Przypuśćmy, że jest inaczej, tzn. $s_{k,\infty} < s_{k+1}$. Oznaczając $A_2(t,x,y) = \big[x - y, f(t,x) - f(t,y)\big]_s - L(t, \|x - y\|)$ (por. Prz. 3.5), na mocy warunku (7.3) wnosimy, iż elementy $(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n})$ (dla $n \in \mathbb{N}_0$) oraz $(s_{k,\infty}, y^\varepsilon_{k,\infty}, y^\delta_{k,\infty})$ należą do zbioru $N(A_2)$. Stąd korzystając z Lematu 3.2 otrzymujemy:

$$\liminf_{n\to\infty} \Delta(F, L, \varepsilon+\delta, s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n}) \geqslant \Delta(F, L, \varepsilon+\delta, s_{k,\infty}, y^\varepsilon_{k,\infty}, y^\delta_{k,\infty}) > 0.$$

Ponieważ minimum funkcji półciągłych z dołu jest półciągłe z dołu, więc

$$\liminf_{n\to\infty} \theta_{k,n} \geqslant \frac{1}{M+1} \min\{s_{k+1} - s_\infty, \Delta(F, L, \varepsilon+\delta, s_{k,\infty}, y^\varepsilon_{k,\infty}, y^\delta_{k,\infty})\} > 0,$$

co stoi w sprzeczność z

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{k,n} = \lim_{n\to\infty} (s_{k,n+1} - s_{k,n}) = 0.$$

Tym samym $s_\infty = s_{k+1}$ i dowód można uznać za zakończony. □

Uwaga 7.1. W przypadku, gdy położymy

$$\theta_{n,k} = \min\{s_{k+1} - s_{k,n}, \frac{1}{M+1}\Delta(F, L, \varepsilon+\delta, s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n})\}$$

istnieć będzie $n = n(k, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ takie, że $s_{k,n} = s_{k+1}$ (por. Uw. 5.5 na str. 47).

Niech Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe będą spełnione. Ustalmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$ i wybierzmy ciągi węzłów przybliżonych $\big((t^\varepsilon_i, x^\varepsilon_i)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ oraz $\big((t^\delta_j, x^\delta_j)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ odpowiadające zagadnieniu początkowemu Cauchy'ego (5.1).

Naszym celem obecnie będzie przedstawienie konstrukcji pary $\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ rozwiązań przybliżonych zagadnienia (5.1). Połóżmy: $y^\varepsilon_0 = x^\varepsilon_0 = x_0$ i $y^\delta_0 = x^\delta_0 = x_0$ i zauważmy, że warunki $(7.1)_0$ oraz $(7.2)_0$ zachodzą, gdyż $i(0) = j(0) = 0$. (Symbol $(7.1)_0$ oznacza warunek (7.1) rozważany dla $k = 0$.) A zatem na mocy Twierdzenia 7.1 (przy założeniu (7.3)) dla początkowych punktów $\{y_0^\varepsilon, y_0^\delta\}$ istnieje ciąg węzłów dla pary aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ na przedziale $[s_0, s_1)$.

Zdefiniujmy:

$$y_1^\varepsilon = \begin{cases} x_{i(0)+1}^\varepsilon & \text{dla } s_1 = t_{i(0)+1}^\varepsilon \ (i(1) = i(0)+1), \\ \lim_{n\to\infty} y_{0,n}^\varepsilon & \text{dla } s_1 < t_{i(0)+1}^\varepsilon \ (i(1) = i(0)), \end{cases}$$

oraz

$$y_1^\delta = \begin{cases} x_{j(0)+1}^\delta & \text{dla } s_1 = t_{j(0)+1}^\delta \ (j(1) = j(0)+1), \\ \lim_{n\to\infty} y_{0,n}^\delta & \text{dla } s_1 < t_{j(0)+1}^\delta \ (j(1) = j(0)). \end{cases}$$

Uwaga 7.2. Powyższe definicje punktów y_1^ε oraz y_1^δ mają sens, gdyż na podstawie dowodu Twierdzenia 7.1 granice: $\lim_{n\to\infty} y_{0,n}^\varepsilon$ oraz $\lim_{n\to\infty} y_{0,n}^\delta$ istnieją.

Sprawdzimy, iż warunek $(7.1)_1$ jest spełniony dla zdefiniowanego powyżej punktu początkowego y_1^ε. Jeżeli $s_1 = t_{i(0)+1}^\varepsilon$, tzn. $i(1) = i(0)+1$, to:

$$\|y_1^\varepsilon - x_{i(1)}^\varepsilon\| = \|x_{i(0)+1}^\varepsilon - x_{i(1)}^\varepsilon\| = 0 \leqslant (M+1)(s_1 - t_{i(1)}^\varepsilon).$$

Jeżeli natomiast $s_1 < t_{i(0)+1}^\varepsilon$, a więc $i(1) = i(0)$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ na podstawie Twierdzenia 7.1 (i) mamy

$$\begin{aligned} \|y_{0,0}^\varepsilon - y_{0,n}^\varepsilon\| &\leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \|y_{0,p}^\varepsilon - y_{0,p+1}^\varepsilon\| \\ &\leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \|y_{0,p}^\varepsilon - y_{0,p+1}^\varepsilon + (s_{0,p+1} - s_{0,p}) f(s_{0,p}, y_{0,p}^\varepsilon)\| + \sum_{p=0}^{n-1} (s_{0,p+1} - s_{0,p}) \|f(s_{0,p}, y_{0,p}^\varepsilon)\| \\ &\leqslant (M+\varepsilon) \sum_{p=0}^{n-1} (s_{0,p+1} - s_{0,p}) \leqslant (M+1)(s_{0,n} - t_0). \end{aligned}$$

Ponieważ $y_{0,0}^\varepsilon = x_0$, $y_{0,n}^\varepsilon \to y_1^\varepsilon$ oraz $s_{0,n} \to s_1$, gdy $n \to +\infty$, to przechodząc w powyższej nierówności z n dążącym do nieskończoności, otrzymujemy

$$\|y_1^\varepsilon - x_{i(1)}^\varepsilon\| = \|y_1^\varepsilon - x_{i(0)}^\varepsilon\| = \|y_1^\varepsilon - x_0^\varepsilon\| \leqslant (M+1)(s_1 - t_0).$$

Sprawdzenie, iż warunek $(7.2)_1$ jest spełniony dla punktu y_1^δ pominiemy, gdyż wystarczy rozumować identycznie jak powyżej.

Tym samym na mocy Twierdzenia 7.1 (przy założeniu (7.3)) dla początkowych punktów $\{y_1^\varepsilon, y_1^\delta\}$ istnieje ciąg węzłów dla pary aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ na przedziale $[s_1, s_2)$. Określając punkty $\{y_2^\varepsilon, y_2^\delta\}$ analogicznie jak punkty $\{y_1^\varepsilon, y_1^\delta\}$ i kontynuując opisany proces, w wyniku otrzymamy przeliczalną rodzinę węzłów $\{(s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta) \colon k, n \in \mathbb{N}_0\}$, zwaną *układem węzłów dla pary aproksymującej parę* $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ *na przedziale* $[t_0, T_0)$.

Definicja 7.1. Niech $\{(s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta) \colon k, n \in \mathbb{N}_0\}$ będzie układem węzłów dla pary aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ na przedziale $[t_0, T_0)$. Parę funkcji $w_\varepsilon, w_\delta \colon [t_0, T_0) \to X$ określonych wzorem $(\gamma = \varepsilon, \delta)$

$$w_\gamma(t) = \begin{cases} y_{k,n}^\gamma & \text{dla } t = s_{k,n}, \\ y_{k,n}^\gamma + \dfrac{t - s_{k,n}}{s_{k,n+1} - s_{k,n}} (y_{k,n+1}^\gamma - y_{k,n}^\gamma) & \text{dla } t \in (s_{k,n}, s_{k,n+1}), \end{cases}$$

nazywamy *parą aproksymującą parę* $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ *na przedziale* $[t_0, T_0)$.

Poniższe twierdzenie podaje pewne własności funkcji w_ε, w_δ.

Twierdzenie 7.2. *Przyjmijmy założenia Twierdzenia 7.1. Niech* $\{(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}, y^\delta_{k,n}) \colon k,n \in \mathbb{N}_0\}$ *będzie układem węzłów dla pary* $\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ *aproksymującej parę* $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ *na przedziale* $[t_0, T_0)$*, gdzie* u_ε, u_δ *są rozwiązaniami przybliżonymi zagadnienia Cauchy'ego* (5.1)*. Wtedy dla każdego* $i \in \mathbb{N}_0$*:*

a) $w_\varepsilon(t^\varepsilon_i) = u_\varepsilon(t^\varepsilon_i)$;

b) *funkcja* w_ε *jest ciągła na przedziale* $[t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1})$;

c) *funkcja* w_ε *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* $M+1$ *na przedziale* $[t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1})$;

d) $\|\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\| \leqslant \frac{5}{2}\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1} - t^\varepsilon_i)$, *gdzie* $\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1}) = \lim_{t \to t^{\varepsilon\,-}_{i+1}} [w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})]$;

e) $\sum_{k=1}^\infty \|\Omega^-(w_\varepsilon - w_\delta)(s_k)\| \leqslant \frac{5}{4}(\varepsilon + \delta)$.

Uwaga 7.3. Powyższe twierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy sformułujemy je dla funkcji w_δ w miejsce funkcji w_ε, pamiętając, by wszystkie symbole i oraz ε zastapić odpowiednimi symbolami j oraz δ tam, gdzie to konieczne.

Dowód. a) Niech $t = t^\varepsilon_p$ dla ustalonego $p \in \mathbb{N}_0$. Wtedy istnieje $k \in \mathbb{N}_0$ takie, że $s_k = t^\varepsilon_p$. Tym samym $i(k-1) = p-1$. Ponieważ $s_k = t^\varepsilon_p = t^\varepsilon_{i(k-1)+1}$, to $y^\varepsilon_k = x^\varepsilon_{i(k-1)+1} = x^\varepsilon_p$. Stąd otrzymujemy: $w_\varepsilon(t^\varepsilon_p) = y^\varepsilon_{k,0} = x^\varepsilon_p = u_\varepsilon(t^\varepsilon_p)$.

b) Niech $i \in \mathbb{N}_0$ będzie ustalone. Wtedy $t^\varepsilon_i = s_k$ oraz $t^\varepsilon_{i+1} = s_p$ dla pewnych $k, p \in \mathbb{N}_0$. Z Definicji 7.1 wynika, iż w przedziale $[s_k, s_{k+1})$ funkcja w_ε jest ciągła (por. Tw. 5.6). Jeżeli więc $p = k+1$, to teza jest oczywista.

Załóżmy, że $p > k+1$. Wtedy $[s_k, s_p) = [s_k, s_{k+1}) \cup [s_{k+1}, s_{k+2}) \cup \ldots \cup [s_{p-1}, s_p)$, gdzie $s_{k+1} = t^\delta_j$, $s_{k+2} = t^\delta_{j+1}$, …, $s_{p-1} = t^\delta_{j+p-k-2}$. Dla prostoty rozważymy przypadek, gdy $p = k+2$. Ponieważ

$$i(r) = \begin{cases} i & \text{dla } r = k, k+1, \\ i+1 & \text{dla } r = k+2, \end{cases}$$

więc

$$y^\varepsilon_r = \begin{cases} x^\varepsilon_i & \text{dla } r = k, \\ \lim_{n \to \infty} y^\varepsilon_{k,n} & \text{dla } r = k+1, \\ x^\varepsilon_{i+1} & \text{dla } r = k+2. \end{cases}$$

Na mocy uwagi wstępnej, wystarczy sprawdzić ciągłość lewostronną w punkcie s_{k+1}. Niech $\eta > 0$ będzie dowolne. Na mocy Twierdzenia 7.1 oraz powyższych rozważań istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\|y^\varepsilon_{k,n} - w_\varepsilon(s_{k+1})\| < \frac{1}{2}\eta$ oraz $\|y^\varepsilon_{k,n+1} - y^\varepsilon_{k,n}\| < \frac{1}{2}\eta$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant n_0$. Oznaczmy $\delta(\eta) = s_{k+1} - s_{k,n_0}$. Niech $s_{k+1} - t < \delta(\eta)$, tzn. $s_{k,n_0} < t$. Jeśli $t = s_{k,n}$ dla pewnego $n \geqslant n_0$, to $\|w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(s_{k+1})\| = \|y^\varepsilon_{k,n} - w_\varepsilon(s_{k+1})\| < \eta$. Jeśli natomiast $t \in (s_{k,n}, s_{k,n+1})$ dla pewnego $n \geqslant n_0$, to

$$\begin{aligned} \|w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(s_{k+1})\| &\leqslant \|y^\varepsilon_{k,n} - w_\varepsilon(s_{k+1})\| + \frac{t - s_{k,n}}{s_{k,n+1} - s_{k,n}} \|y^\varepsilon_{k,n+1} - y^\varepsilon_{k,n}\| \\ &\leqslant \|y^\varepsilon_{k,n} - w_\varepsilon(s_{k+1})\| + \|y^\varepsilon_{k,n+1} - y^\varepsilon_{k,n}\| < \eta, \end{aligned}$$

a zatem funkcja w_ε jest ciągła w punkcie s_{k+1}.

c) Z Twierdzenia 7.1 (i) oraz Definicji 7.1 wynika, że

$$\|w'_\varepsilon(t) - f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{dla } s_{k,n} < t < s_{k,n+1}. \tag{7.9}$$

Stąd $\|w'_\varepsilon(t)\| \leqslant M+1$ dla $t \in [t_0, T_0) \setminus A_c$, gdzie $A_c = \{s_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}_0\}$. Wtedy na mocy Twierdzenia 1.9 oraz podpunktu b)

$$\|w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(s)\| \leqslant (M+1)|t-s| \qquad \text{dla } t, s \in [t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1}) \text{ i } i \in \mathbb{N}_0.$$

d) Ustalmy $i \in \mathbb{N}_0$ i niech $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ będą takie, że $t^\varepsilon_i = s_{k_1}$ oraz $t^\varepsilon_{i+1} = s_{k_2}$. Wybierzmy $t \in [t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1}) \setminus A_d$, gdzie $A_d = \{s_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}_0,\ k_1 \leqslant k < k_2\}$. Wtedy $t \in (s_{k,n}, s_{k,n+1})$ dla pewnych $k, n \in \mathbb{N}_0$ takich, że $k_1 \leqslant k < k_2$. Ponieważ $s_{k,n} \in [t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1})$ oraz (por. (7.6))

$$\|x^\varepsilon_i - y^\varepsilon_{k,n}\| \leqslant (M+1)(s_{k,n} - t^\varepsilon_i) \leqslant (M+1)(t^\varepsilon_{i+1} - t^\varepsilon_i).$$

więc na mocy Twierdzenia 5.5 (iii) (dla $\varepsilon > 0$) (7.9) oraz (5.26) otrzymujemy

$$\|w'_\varepsilon(t) - u'_\varepsilon(t)\| \leqslant \|w'_\varepsilon(t) - f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n})\| + \|f(s_{k,n}, y^\varepsilon_{k,n}) - f(t^\varepsilon_i, x^\varepsilon_i)\| + \|f(t^\varepsilon_i, x^\varepsilon_i) - u'_\varepsilon(t)\| \leqslant \tfrac{5}{2}\varepsilon.$$

Stąd na mocy Twierdzenia 1.9 oraz podpunktu a) dla wszystkich $t \in [t^\varepsilon_i, t^\varepsilon_{i+1})$ mamy

$$\|w_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)\| = \|(w_\varepsilon - u_\varepsilon)(t) - (w_\varepsilon - u_\varepsilon)(t^\varepsilon_i)\| \leqslant \tfrac{5}{2}\varepsilon(t - t^\varepsilon_i). \tag{7.10}$$

Ponieważ na mocy podpunktu c) (por. str. 34) granica $\lim_{t \to {t^\varepsilon_{i+1}}^-} w_\varepsilon(t)$ istnieje, więc wektor

$$\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1}) = \lim_{t \to {t^\varepsilon_{i+1}}^-} \big[w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\big]$$

jest poprawnie zdefiniowany. Korzystając z ciagłości funkcji $u_\varepsilon(t)$ na przedziale $[t_0, T_0]$ (por. Tw. 5.6), podpunktu a) oraz z (7.10) otrzymujemy

$$\|\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\| \leqslant \lim_{t \to {t^\varepsilon_{i+1}}^-} \|w_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t)\| + \lim_{t \to {t^\varepsilon_{i+1}}^-} \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\| \leqslant \tfrac{5}{2}\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1} - t^\varepsilon_i).$$

e) Zauważmy, iż

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\Omega^- w_\varepsilon(s_k)\| = \sum_{i=0}^{\infty} \|\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\|,$$

gdyż w punkcie $s_k = t^\delta_j$ funkcja w_ε jest ciągła, czyli $\Omega^- w_\varepsilon(s_k) = 0$ (analogicznie dla funkcji w_δ oraz punktu $s_k = t^\varepsilon_i$). Na mocy podpunktu d) granica $\Omega^-(w_\varepsilon - w_\delta)(s_k)$ istnieje dla każdego $k \in \mathbb{N}$, a zatem w oparciu o Założenie Szczegółowe (S3) mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\Omega^-(w_\varepsilon - w_\delta)(s_k)\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \|\Omega^- w_\varepsilon(t^\varepsilon_{i+1})\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|\Omega^- w_\delta(t^\delta_{j+1})\| \leqslant \tfrac{5}{2}(\varepsilon + \delta)(T_0 - t_0) \leqslant \tfrac{5}{4}(\varepsilon + \delta).$$

Tym samym możemy uznać twierdzenie za udowodnione.

□

Naszym celem będzie obecnie udowodnienie twierdzenia o istnieniu (prawostronnego) lokalnego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego (5.1).

Twierdzenie 7.3. *Rozpatrzmy zagadnienie Cauchy'ego* (5.1) *i przyjmijmy, że Założenia Ogólne oraz Założenia Szczegółowe są spełnione. Jeśli istnieje funkcja ciągła* $L\colon (t_0^1, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *silnie normalna na przedziale* (t_0^1, t_0^2) *(por. Def. 4.1) oraz taka, że*

$$\big[x-y, f(t,x)-f(t,y)\big]_s \leqslant L(t, \|x-y\|) \quad \textit{dla } t \in (t_0^1, t_0^2) \textit{ oraz } x, y \in D,$$

to wtedy zagadnienie (5.1) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie* u*, określone na przedziale* $[t_0, T_0]$ *dla pewnego* $t_0 < T_0 < t_0^2$*. Ponadto,* $u(t) \in D_0$ *dla dowolnego* $t \in [t_0, T_0]$.

Dowód. Niech $\gamma > 0$ będzie ustalone. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 4.1 możemy skonstruować rodzinę $\{\varphi_\xi\colon [t_0, t_\gamma) \to [0,\infty) : 0 < \xi \leqslant \gamma\}$ rozwiązań maksymalnych zagadnień $(4.1)_{(t_0,\xi)}$, gdzie $\xi \in (0,\gamma]$ o własności (4.4), określonych na wspólnym przedziale istnienia $[t_0, t_\gamma)$. Jak poprzednio (por. str. 29) przedział $[t_0, t_\gamma)$ $(t_0 < t_\gamma)$ jest maksymalnym przedziałem istnienia (na prawo od t_0) rozwiązania maksymalnego φ_γ zagadnienia początkowego $(4.1)_{(t_0,\gamma)}$.

Wybierzmy $T_0 \in (t_0, t_0^*)$. Bez straty ogólności możemy założyć, iż $T_0 \in [t_0, t_\gamma)$ (por. Tw. 6.2). Naszym celem będzie wykazanie, iż rodzina $\mathscr{App}$ (por. Roz. 6) spełnia kryterium Cauchy'ego:

$$\forall\, \eta > 0\ \exists\, \tau \in (0,1) \quad 0 < \varepsilon,\ \delta < \tau \Rightarrow \|u_\varepsilon - u_\delta\|_\infty < \eta, \tag{7.11}$$

gdzie u_ε, u_δ oznaczają rozwiązania przybliżone zagadnienia (5.1). Wtedy na mocy zupełności przestrzeni $C\big([t_0, T_0], X\big)$ zbior $\mathscr{Lim}$ będzie niepusty, a zatem w świetle Twierdzenia 6.1 zagadnienie (5.1) będzie posiadać rozwiązanie o wartościach w zbiorze $D_0 \subset D$.

Ustalmy $\eta > 0$ i oznaczmy (por. Prz. 3.4)

$$c(\zeta) = \Delta(L, [t_0, T_0] \times [0, 8r_0], \zeta) \qquad \text{dla } \zeta > 0$$

oraz

$$\mu = \tfrac{1}{2}\min\{\nu(\tfrac{\eta}{2}), \tfrac{1}{2}\eta\} \quad \sigma = \tfrac{1}{2}\min\left\{\mu, 4r_0, c\left(\tfrac{\mu}{2}\right)\right\}, \quad \tau = \tfrac{1}{5}\sigma,$$

gdzie $\nu(\frac{\eta}{2}) \in (0,\gamma)$ i $r_0 > 0$ są wielkościami wprowadzonymi w Twierdzeniu 4.1 oraz na stronie 41, odpowiednio. Ponadto przyjmijmy, iż $\big((t_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ oraz $\big((t_j^\delta, x_j^\delta)\big)_{i\in\mathbb{N}_0}$ są ciągami węzłów przybliżonych odpowiadających zagadnieniu początkowemu Cauchy'ego (5.1), natomiast $\big\{\big(s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta\big)\colon k,n \in \mathbb{N}_0\big\}$ układem węzłów dla pary $\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ na przedziale $[t_0, T_0)$.

Połóżmy $B = \{s_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ i dla $\varepsilon, \delta \in (0,\tau)$ zdefiniujmy funkcję $\varphi\colon [t_0, T_0) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $\varphi(t) = \big\|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\big\|$. Sprawdzimy, że dla funkcji φ spełnione są założenia Twierdzenia 4.3.

Na mocy Twierdzenia 7.2 d) wnosimy, iż φ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $M+1$ na każdym przedziale $[s_k, s_{k+1})$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Wybierzmy dowolne $t \in [t_0, T_0)$. Wtedy $t \in [s_k, s_{k+1})$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ $x_{i(k)}^\varepsilon, x_{j(k)}^\delta \in D_0 \subset B_X(x_0, r_0)$ (por. Tw. 5.5), więc korzystając z $(7.1)_k$, $(7.2)_k$, Twierdzenia 7.2 a) oraz Założenia Szczegółowego (S3) dostajemy

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leqslant \big\|w_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(s_k)\big\| + \big\|w_\varepsilon(s_k) - w_\delta(s_k)\big\| + \big\|w_\delta(s_k) - w_\delta(t)\big\| \\
&\leqslant 2(M+1)(t - s_k) + \big\|y_k^\varepsilon - y_k^\delta\big\| \\
&\leqslant 2(M+1)(t - s_k) + \big\|y_k^\varepsilon - x_{i(k)}^\varepsilon\big\| + \big\|x_{i(k)}^\varepsilon - x_{j(k)}^\delta\big\| + \big\|x_{j(k)}^\delta - y_k^\delta\big\| \\
&\leqslant (M+1)\big(2t - t_{i(k)}^\varepsilon - t_{j(k)}^\delta\big) + 2r_0 \leqslant 4r_0.
\end{aligned}$$

Tym samym funkcja φ jest ograniczona na przedziale $[t_0, T_0)$.

Pokażemy teraz, iż φ spełnia założenie d) Twierdzenia 4.3. Oznaczmy $A = \{s_{k,n} : k, n \in \mathbb{N}_0\}$ i wybierzmy $t \in [t_0, T_0) \setminus A$. Wtedy $t \in (s_{k,n}, s_{k,n+1})$ dla pewnych $k, n \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ w oparciu o Definicję 7.1 oraz Twierdzenie 7.1 (i) mamy (dla $\gamma = \varepsilon, \delta$)

$$\|w_\gamma(t) - y^\gamma_{k,n}\| \leqslant (M+1)(s_{k,n+1} - s_{k,n}), \tag{7.12}$$

więc na mocy Twierdzenia 7.1 (ii) otrzymujemy

$$\big[w_\varepsilon(t) - w_\delta(t), F(t, w_\varepsilon(t)) - F(t, w_\delta(t))\big]_i \leqslant L(t, \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\|) + \varepsilon + \delta. \tag{7.13}$$

Ponadto w świetle (7.8) oraz (7.12) dostajemy (dla $\gamma = \varepsilon, \delta$ i $l = i, j$ odpowiednio)

$$\|w_\gamma(t) - x^\gamma_{l(k)}\| \leqslant \|w_\gamma(t) - y^\gamma_{k,n}\| + \|y^\gamma_{k,n} - x^\gamma_{l(k)}\| \leqslant (M+1)(s_{k,n+1} - t^\gamma_{l(k)}),$$

a zatem korzystając z (7.8) (raz jeszcze), (7.9), definicji liczb $s_{k,n}$ oraz Twierdzenia 5.5 (iii) mamy (dla $\gamma = \varepsilon, \delta$)

$$\|w'_\gamma(t) - F(t, w_\gamma(t))\| \leqslant \|w'_\gamma(t) - f(s_{k,n}, y^\gamma_{k,n})\| + \|f(s_{k,n}, y^\gamma_{k,n}) - F(t, w_\gamma(t))\| \leqslant \tfrac{3}{2}\gamma. \tag{7.14}$$

Ostatecznie, rozumując analogiczne jak na stronie 55 dochodzimy do następującej nierówności:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\Big(\|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t) + \lambda(w'_\varepsilon(t) - w'_\delta(t))\| - \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\|\Big) \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(\|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t) + \lambda[F(t, w_\varepsilon(t)) - F(t, w_\delta(t))]\| - \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\|\Big) \\
&\qquad\qquad + \|w'_\varepsilon(t) - F(t, w_\varepsilon(t))\| + \|w'_\delta(t) - F(t, w_\delta(t))\|.
\end{aligned}$$

Reasumując, dla $t \in [t_0, T_0) \setminus A$, na mocy Twierdzenia 3.3 k) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Lambda^-\varphi(t) &= [w_\varepsilon(t) - w_\delta(t), w'_\varepsilon(t) - w'_\delta(t)]_i \\
&\leqslant \big[w_\varepsilon(t) - w_\delta(t), F(t, w_\varepsilon(t)) - F(t, w_\delta(t))\big]_i \\
&\qquad + \|w'_\varepsilon(t) - F(t, w_\varepsilon(t))\| + \|w'_\delta(t) - F(t, w_\delta(t))\| \\
&\leqslant L(t, \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\|) + \tfrac{5}{2}(\varepsilon + \delta) \leqslant L(t, \varphi(t)) + \sigma.
\end{aligned}$$

Tym samym funkcja φ spełnia założenie d) Twierdzenia 4.3.

Ponieważ $|\varphi(t) - \varphi(s_k)| \leqslant \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t) - w_\varepsilon(s_k) + w_\delta(s_k)\|$ dla wszystkich $t \in (s_k, s_{k+1})$, gdzie $k \in \mathbb{N}_0$, więc

$$|\Omega^-\varphi(s_k)| \leqslant \|\Omega^-(w_\varepsilon - w_\delta)(s_k)\|,$$

a zatem na mocy Twierdzenia 7.2 e) oraz przyjętych przez nas oznaczeń mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Omega^-\varphi(s_k)| \leqslant \tfrac{5}{4}(\varepsilon + \delta) \leqslant \sigma.$$

Na koniec zauważmy, że $\varphi(t_0) = 0 \leqslant \sigma$. Tym samym wszytkie założenia Twierdzenia 4.3 są spełnione dla funkcji φ.

Stąd dla wszystkich $t \in [t_0, T_0)$ oraz $\nu \in (\mu, \gamma)$ zachodzi: $\varphi(t) \leqslant \varphi_\nu(t)$, więc w świetle (7.10), Założenia Szczegółowego (S3) oraz przyjętych przez nas oznaczeń, dla $t \in [t_0, T_0)$ dostajemy

$$\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\| \leqslant \|u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t)\| + \|u_\delta(t) - w_\delta(t)\| + \|w_\varepsilon(t) - w_\delta(t)\| \leqslant \varphi_\nu(t) + \nu.$$

W szczególności dla $\nu_0 = \frac{3}{4}\min\{\nu(\frac{\eta}{2}), \frac{1}{2}\eta\} \in (\mu, \gamma)$ dla wszystkich $t \in [t_0, T_0)$ mamy

$$\|u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)\| \leqslant \eta.$$

Tym samym wykazaliśmy, iż warunek (7.11) jest spełniony.

Jedyności rozwiązania dowodzi się analogicznie jak w Twierdzeniu 6.2. $\square$

Uwaga 7.4. Podobnie jak w przypadku Twierdzenia 6.2, Twierdzenie 7.3 pozwala na przedłużenie (prawostronnego) rozwiązania $x\colon [t_0, T_0] \to D$ zagadnienia (5.1) (tutaj zbiór D nie musi być lokalnie wypukły) na pewien przedział postaci $[t_0, b]$, gdzie $T_0 < b < t_0^2$. (por. Uw 6.3).

Uwaga 7.5. W [20] (Rozdział 2, Paragraf 7) Lakshmikantham oraz Leela podają wersję Twierdzenia 7.3, w której zamiast silnej normalności funkcji $L\colon (t_0^1, t_0^2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zakładają, iż dla każdego $t \in (t_0^1, t_0^2)$ funkcja $x \mapsto L(x, t)$ jest rosnąca.

By lepiej zrozumieć jakie relacje zachodzą pomiędzy klasami funkcji dwóch zmiennych: silnie normalnych oraz rosnących względem x przy ustalonym t rozpatrzmy poniższy przykład.

Przykład 7.1. Przyjmijmy, że przedział $(t_0^1, t_0^2) = (-1, 1)$.

a) Istnieje funkcja $L(t, x)$ silnie normalna, która jest rosnąca ze względu na x przy ustalonym t. Istotnie, wystarczy przyjąć $L(t, x) = (t+2)x$, gdyż jak łatwo sprawdzić dla każdego $t_0 \in (-1, 1)$, jedynym rozwiązaniem zagadnienia $(4.1)_{(t_0,0)}$ jest funkcja $x(t) \equiv 0$.

b) Istnieje funkcja $L(t, x)$ rosnąca względem x przy ustalonym t, która nie jest silnie normalna. Określmy funkcję $L(t, x)$ wzorem $L(t, x) = 2(t + 2)\sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$ oraz $L(t, x) = -2(t + 2)\sqrt{-x}$ dla $x < 0$. Bazując na Przykładzie 4.1 nietrudno dowieść, iż faktycznie $L(t, x)$ zdefiniowana powyższymi równościami nie jest silnie normalna.

c) Istnieje funkcja $L(t, x)$ która jest silnie normalna, ale nie jest rosnąca względem x przy ustalonym t. Niech $L(t, x) = tx$. Tym razem funkcja $L(t, x)$ nie jest rosnąca względem x przy każdym t, jest natomiast silnie normalna, co nietrudno wykazać.

Uwagi

Praktycznie wszystkie wyniki Rozdziału 7 pochodzą z [30]. Szkic alternatywnego dowód Twierdzenia 7.1 można znaleźć w [30].

Bibliografia

[1] Alexiewicz A., *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 1969.

[2] Aronszajn N., *Le correspondent topologique de l'unicité dans le théorie des équations différentielles*, Ann. Math. **43** (1942), 730-738.

[3] Barbu V. and Precupanu Th., *Convexity and optimalization in Banach spaces*, Editura Academiei, Bucaresti, Romania, 1986.

[4] Bugajewski D. and Szufla S., *Kneser's theorem for weak solutions of the Darboux problem in Banach spaces.*, Nonlinear Anal., TMA **20** (1993), no. 2, 169-173.

[5] Cellina A., *On the existence of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*, Funkc. Ekvac. **14** (1971), 129-136.

[6] Deimling K., *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.

[7] Dieudonné J., *Deux examples d'équations différentielles*, Acta Sci. Math. (Szeged) **12B** (1950), 38-40.

[8] Dieudonné J., *Foundation of modern analysis*, Academic Press, New York, 1960.

[9] Distel J., *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo, 1984.

[10] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[11] Dugundji J. and Granas A., *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1982.

[12] Dragoni R., Macki J.W., Nistri P., and Zecca P., *Solution sets of differential equations in abstract spaces*, Pitman Resarch Notes in Mathematics Series 342, Longman, Essex, 1996.

[13] Godunov A. N., *A conuterexample to Peano's theorem in an infinite dimensional Hilbert space*, Vestnik Mosk. Gos. Univ., Ser. Mat. Mek. **5** (1972), 31-34.

[14] Godunov A. N., *On Peano's theorem in Banach spaces*, Funct. Anal. Appl. **9** (1975), no. 1, 53-55.

[15] Hartman P., *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York – London – Sydney, 1964.

[16] Kari A., *On Peano's theorem in locally convex spaces*, Studia Math. **73** (1982), no. 1, 213-223.

[17] Knesser H., *Über die lösungen eine system gewönlicher differential Gleichungen, das der lipschitzschen Bedingung nicht genügt.*, S.B. Preuss Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. **4** (1923), 171-174.

[18] Kubiaczyk I., *On the existence of solutions of differential equations in Banach spaces.*, Bull. Pol. Acad. Sci., Math. **33** (1985), 607-614.

[19] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Wydanie dziewiąte, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.

[20] Lakshmikantham V. and Leela S., *Nonlinear differential equations in abstract spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[21] Łojasiewicz S., *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Matematyczna, Tom 46, PWN, Warszawa, 1973.

[22] Martin R.H., *Differential equations on closed subsets of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 399-414.

[23] Martin R.H., *Nonlinear operators and differential equations in Banach Spaces*, Wiley and Sons, New York, 1976.

[24] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa, 1976.

[25] Peano G., *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti della Reale Accad. dell Scienze di Torino **21** (1886), 677-685.

[26] Peano G., *Démonstration de l'integrabilité des equations differentielles ordinaires*, Mat. Ann. **37** (1890), 182-238.

[27] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste, tom I*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1958.

[28] Szufla S., *On the existence of solutions of differential equations in Banach spaces.*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. **30 (1982)** (1983), no. 11-12, 507-515.

[29] Turinici M., *Stability criteria for contractive semigroups via maximality procedures*, Bull. Austral. Math. Soc. **24** (1981), 453-469.

[30] Turinici M., *Flow invariance over closed sets under general dissipativity conditions*, Sci. Annals of USAMV Iasi, Sect. HORTICULTURE Proc. of the Annual Symposium on "Mathematics applied in Biology and Biophisics" **47 (2)** (2004), 35-67.

[31] Weston J.D., *A characterization of metric completness*, Proc. Amer. Math. Soc. **64** (1977), no. 1, 186-188.

[32] Yorke J.A., *A continous differential equation in Hilbert space without existence*, Funkc. Ekcav. **13** (1970), 19-21.

Skorowidz oznaczeń

l^p – p. ciągów $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dla których $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p} < +\infty$, 22
l^∞ – p. ciągów $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograniczonych z normą $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\xi_k|$, 22
$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ – p. funkcji $x\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takich, że $\|x\|_p = \left(\int_\Omega |x(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p} < +\infty$, 22
$[x, y]_s$ – górny iloczyn półskalarny pomiędzy elementami x i y, 16
$\langle x, y\rangle$ – iloczyn skalarny pomiędzy elementami x i y, 19
$\mathcal{M}(A, H, \varepsilon, x)$ – 24,
$\Delta(A, H, \varepsilon, x)$ – moduł (pół)ciągłośći, 24
$N(f)$ – ujemna dziedzina funkcji f, 26
$\Omega^-\varphi(t)$ – oscylacja Diniego funkcji φ w punkcie t, 34
$\varphi_\xi(t)$ – prawostronne rozwiązanie maksymalne zagadnienia (4.1), 29
$\varphi_\xi \rightrightarrows \varphi_0$ – zbieżność jednostajna ciągu (sieci) $(\varphi_\xi)_\xi$ do funkcji φ_0, 31
$\preccurlyeq$ – relacja częściowo porządkująca, 37
$\prec$ – relacja ostrego częściowego porządku, 37
C – zbiór całkowicie uporządkowany (łańcuch), 37
u_ε – rozwiązanie ε-przybliżone zagadnienia Cauchy'ego (5.1), 37
$\left((t_i^\varepsilon, x_i^\varepsilon)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ – ciąg węzłów dla rozwiązania ε-przybliżonego, 51
$\mathscr{App}$ – zbiór rozwiązań przybliżonych zagadnienia Cauchy'ego (5.1), 53
$\mathscr{Lim}$ – zbiór granic jednostajnie zbieżnych ciągów o wyrazach z $\mathscr{App}$, 53
$N_{\varepsilon,\delta}$ – zbiór odciętych węzłów rozwiązań ε- i δ-przybliżonych, 59
$\left(s_{k,n}, y_{k,n}^\varepsilon, y_{k,n}^\delta\right)$ – węzęł dla pary $\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ aproksymującej parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$, 60
$\{w_\varepsilon, w_\delta\}$ – para aproksymująca parę $\{u_\varepsilon, u_\delta\}$ rozwiązań przybliżonych zag. (5.1), 63
K – klin, 57
K^* – klin dualny, 57
(Ω, Σ, P) – przestrzeń probabilistyczna, 57
$P(\cdot|\cdot)$ – prawdopodobieństwo warunkowe, 57
X_t – zmienna losowa, 57
$o(h)$ – symbol Landaua, 57

Skorowidz