

ROZDZIAŁ 3

LICZBY ZESPOLONE

TEORIA

WZÓR DE MOIVRE'A: $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

PIERWIASTEK STOPNIA n LICZBY ZESPOLONEJ z . Niech z będzie liczbą zespoloną daną w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie n pierwiastków stopnia n liczby zespolonej z postaci

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

ZADANIA

Zadanie 3.1. Podać liczbę sprzężoną do następujących liczb zespolonych:

(a) $1 + i$;

(d) $3i$;

(b) $1 - 2i$;

(e) $-4i$;

(c) $-6 - 7i$;

(f) 1 .

Zadanie 3.2. Oblicz:

(a) $(2 + 3i) + (4 - 5i)$;

(d) $(5 + 3i)(3 - i)$;

(b) $(2 + 3i) - (2 - 3i)$;

(e) $(1 - 3i)^2$;

(c) $\frac{1 - i}{1 + i}$;

(f) $\frac{3 + 2i}{1 + i}$.

Zadanie 3.3. Rozwiąż równanie:

(a) $|z| - z = 1 + 2i$;

(b) $z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} = 3 + 2i$.

Zadanie 3.4. Rozwiąż równanie:

(a) $z^2 + 2z + 2 = 0$;

(c) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$;

(b) $z^2 - 2z + 5 = 0$;

(d) $z^3 + z^2 + 4z + 4 = 0$.

Zadanie 3.5. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone:

(a) 1;

(d) $-i$;

(g) $-1 + \sqrt{3}i$;

(b) -3 ;

(e) $1 + i$;

(h) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;

(c) $2i$;

(f) $1 - i$;

(i) $2 - 2\sqrt{3}i$.

Zadanie 3.6. Dla podanych liczb zespolonych z i w obliczyć $z \cdot w$ oraz $\frac{z}{w}$ i $\frac{w}{z}$:

(a) $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $w = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$;

(b) $z = 5\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$ oraz $w = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$.

Zadanie 3.7. Oblicz:

(a) $(2i)^5$;

(c) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$;

(b) $(1 + i)^8$;

(d) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

Zadanie 3.8. Bez posługiwania się postacią trygonometryczną, oblicz pierwiastek kwadratowy następujących liczb zespolonych:

(a) $8 + 6i$;

(b) $3 + 4i$.

Zadanie 3.9. Oblicz następujące pierwiastki z liczb zespolonych:

(a) $\sqrt{1}$;

(c) $\sqrt[3]{1 + i}$;

(e) $\sqrt[8]{1}$.

(b) $\sqrt[3]{-1}$;

(d) $\sqrt[4]{-64}$;

Zadanie 3.10. Podaj interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^2 = 2\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$;

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{3}\right\}$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 3.1. (a) $1 - i$; (b) $1 + 2i$; (c) $-6 + 7i$; (d) $-3i$; (e) $4i$; (f) 1 .

Zadanie 3.2. (a) $6 - 2i$; (b) $6i$; (c) $-i$; (d) $18 + 4i$; (e) $-8 - 6i$; (f) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$.

Zadanie 3.3. (a) $z = \frac{3}{2} - 2i$; (b) $z_1 = \sqrt{2} + i$ lub $z_2 = -\sqrt{2} + i$.

Zadanie 3.4. (a) $z_1 = -1 - i$ lub $z_2 = -1 + i$; (b) $z_1 = 1 - 2i$ lub $z_2 = -1 + 2i$; (c) $z_1 = -2$ lub $z_2 = i$ lub $z_3 = -i$; (d) $z_1 = -1$ lub $z_2 = 2i$ lub $z_3 = -2i$.

Zadanie 3.5. (a) $z = \cos 0 + i \sin 0$; (b) $z = -3(\cos \pi + i \sin \pi)$; (c) $z = 2(\cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi)$; (d) $z = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi$; (e) $z = \sqrt{2}(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi)$; (f) $z = \sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$; (g) $z = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$; (h) $z = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi$; (i) $z = 4(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi)$.

Zadanie 3.6. (a) $z \cdot w = 6(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi)$, $\frac{z}{w} = \frac{2}{3}(\cos \frac{1}{6}\pi + i \sin \frac{1}{6}\pi)$, $\frac{w}{z} = \frac{3}{2}(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$; (b) $z \cdot w = 5(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi)$, $\frac{z}{w} = 5(\cos \frac{1}{12}\pi + i \sin \frac{1}{12}\pi)$, $\frac{w}{z} = \frac{1}{5}(\cos \frac{23}{12}\pi + i \sin \frac{23}{12}\pi)$.

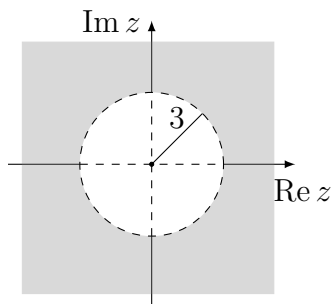
Zadanie 3.7. (a) $32i$; (b) 16 ; (c) $-16(1 + \sqrt{3}i)$; (d) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Zadanie 3.8. (a) $z_0 = 3 + i$ oraz $z_1 = -3 - i$; (b) $z_0 = 2 + i$ oraz $z_1 = -2 - i$.

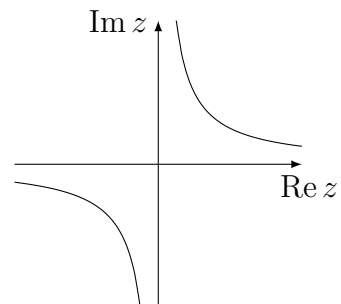
Zadanie 3.9. (a) $z_0 = 1$, $z_1 = -1$; (b) $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (c) $z_0 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{1}{12}\pi + i \sin \frac{1}{12}\pi)$, $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) = 2^{-\frac{1}{3}}(-1 + i)$, $z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi)$; (d) $z_0 = 2 + 2i$, $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = 2 - 2i$; (e) $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $z_2 = i$, $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, $z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $z_6 = -i$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

Zadanie 3.10.

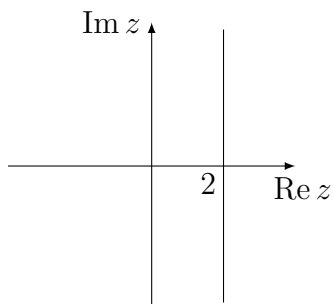
(a)



(c)



(b)



(d)

