Przykład 7.1. (a) Mówimy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, spełnia *warunek Lipschitza*, jeśli istnieje taka liczba $L \in \mathbb{R}_+$, że

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2| \quad \text{dla dowolnych } x_1, x_2 \in A.$$

Jest to równoważne temu, że wykres funkcji f „znajduje się" pomiędzy prostymi o równaniach $y = f(x_0) + L(x - x_0)$ oraz $y = f(x_0) - L(x - x_0)$, przy dowolnym ustalonym $x_0 \in A$. Funkcja f spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła.

Dodajmy, że warunek Lipschitza jest tylko warunkiem dostatecznym ciągłości, ale nie jest to warunek konieczny.

(b) Funkcja identycznościowa $x \mapsto x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest oczywiście funkcją ciągłą, a zatem każdy wielomian $x \mapsto a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, gdzie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, jest funkcją ciągłą.

Ponadto funkcja wymierna

$$x \mapsto \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n},$$

określona w zbiorze tych $x \in \mathbb{R}$, dla których mianownik jest różny od zera, jest funkcją ciągłą (zakładamy oczywiście, że wielomian występujący w mianowniku nie znika tożsamościowo).

(c) Funkcje trygonometryczne $x \mapsto \cos x$ oraz $x \mapsto \sin x$ określone dla $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$. Funkcje cosinus oraz sinus są więc ciągłe na $\mathbb{R}$. Ponadto wobec Twierdzenia 7.8 możemy stwierdzić, że funkcje

$$x \mapsto \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ dla } x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{oraz} \quad x \to \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ dla } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

są ciągłe.

(d) Niech $a > 0$. Rozważmy funkcję wykładniczą $x \mapsto a^x$ określoną dla $x \in \mathbb{R}$. W oparciu o własności potęgi o wykładniku rzeczywistym wnioskujemy, że funkcja $x \mapsto a^x$ jest ściśle rosnąca dla $a > 1$ oraz ściśle malejąca dla $0 < a < 1$ (oczywiście dla $a = 1$ funkcja $x \mapsto a^x$ jest stała i równa 1). Można łatwo uzasadnić, że funkcja wykładnicza jest ciągła.

(e) Oznaczmy przez f funkcję potęgową, to znaczy $f(y) = y^n$ dla $y \in \mathbb{R}$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną. Rozważmy dwa przypadki. Jeśli n jest liczbą parzystą, to f nie jest różnowartościowa i dlatego nie posiada ona funkcji odwrotnej. Jednak zawężenie g funkcji f do przedziału $[0, +\infty)$ jest funkcją ściśle rosnącą, więc posiada funkcję odwrotną zwaną *funkcją pierwiastkową*.

W przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą, f jest funkcją ściśle rosnącą, a więc posiada funkcję odwrotną, zwaną tak jak w poprzednim przypadku *funkcją pierwiastkową*.

Bazując na Twierdzeniu 7.11 można uzasadnić, że w obydwu przypadkach funkcja pierwiastkowa jest ciągła.

(f) Niech $a > 0$, $a \neq 1$ oraz niech $f(y) = a^y$ dla $y \in \mathbb{R}$. Funkcja f jest ściśle monotoniczna, a zatem posiada funkcję odwrotną, którą nazywamy *funkcją logarytmiczną przy podstawie a*. Wykorzystując Twierdzenie 7.11 można uzasadnić, że funkcja logarytmiczna jest ciągła.

Dodajmy, że logarytm przy podstawie e nazywa się *logarytmem naturalnym* i oznacza się go symbolem ln, tj. $\ln x = \log_e x$, gdzie $x > 0$. Ponadto funkcję e^x oznacza się często symbolem $\exp x$.

(g) *Funkcjami cyklometrycznymi* nazywa się funkcje odwrotne względem zawężeń funkcji trygonometrycznych.

Oczywiście funkcja sinus nie posiada funkcji odwrotnej, ponieważ nie jest różnowartościowa. Oznaczmy przez f funkcję sinus zawężoną do przedziału $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Funkcja f jest ściśle rosnąca, a zatem posiada funkcję odwrotną, zwaną arcus sinus, którą oznaczamy przez arc sin. Dla danego $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ jest więc tą jedyną liczbą $y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, dla której $\sin y = x$. Na mocy Twierdzenia 7.11 arcus sinus jest funkcją ciągłą.

Niech g oznacza funkcję tangens zawężoną do przedziału $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Funkcja g jest ściśle rosnąca, a zatem posiada funkcję odwrotną, zwaną arcus tangens, którą oznaczamy przez arc tg. Dla danego $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arc\,tg} x$ jest tą jedyną liczbą $y \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, dla której $\operatorname{tg} y = x$. Na mocy Twierdzenia 7.11 arcus tangens jest funkcją ciągłą.

Podobnie można zdefiniować funkcje arcus cosinus oraz arcus cotangens, oznaczane odpowiednio przez arc cos i arc ctg, jako funkcje odwrotne względem funkcji $y \mapsto \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ oraz $y \mapsto \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$.