## Rozdział 8

# Rachunek różniczkowy

## Zadania

**Zadanie 8.1.** Obliczyć pochodną funkcji:

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$;

(b) $f(x) = 9x^7 + 5x^{-3} - 3x^{-11}$;

(c) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 2)$;

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} \ln x$;

(e) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+3}$;

(f) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

(g) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$;

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$;

(i) $f(x) = \cos 3x$;

(j) $f(x) = \sqrt{\sin x}$;

(k) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$;

(l) $f(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x$;

(m) $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$;

(n) $f(x) = \arccos \dfrac{2x-1}{3}$;

(o) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$;

(p) $f(x) = \ln(\cos x)$;

(q) $f(x) = \ln(\arccos 2x)$;

(r) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;

(s) $f(x) = x^4 e^{\sin x}$;

(t) $f(x) = e^{-\sin x}$;

(u) $f(x) = \ln(\ln x)$;

(v) $f(x) = 6\sqrt{\operatorname{arctg} x}$;

(w) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$;

(x) $f(x) = x^x$.

**Zadanie 8.2.** Znaleźć $f''$ oraz $f'''$, jeżeli

(a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 7, \quad x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = e^x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \ln(1+x), \quad x > -1$;

(d) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

**Zadanie 8.3.** Znaleźć równania stycznych do krzywej zadanej wzorem:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

(b) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

w punktach o odciętych $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ oraz $x_3 = -1$.

**Zadanie 8.4.** Zbadać monotoniczność następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

(b) $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$;

(c) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

**Zadanie 8.5.** Znaleźć ekstrema lokalne następujących funkcji:

(a) $f(x) = 2x^6 - 3x^4$;

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

**Zadanie 8.6.** Zbadać wypukłość i punkty przegięcia funkcji:

(a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$;

(b) $f(x) = e^{-x^2}$;

(c) $f(x) = x^2 \ln x$.

**Zadanie 8.7.** Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

**Zadanie 8.8.** Jakie wymiary powinno mieć naczynie o kształcie otwartego walca o objętości $V = \pi^4$ cm$^3$, aby przy danej grubości ścianek, wynoszącej 1 cm na jego wykonanie zużyć jak najmniej materiału?

**Zadanie 8.9.** Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny $a\%$ tlenu i $(100-a)\%$ azotu w temperaturze 1600°C i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$x(a) = \sqrt{Ka(100-a)} - 25K,$$

gdzie $K > 0$ jest stałą równowagi reakcji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Oblicz, przy jakiej procentowej zawartości tlenu w mieszaninie wydajność tlenku azotu NO będzie maksymalna.

**Zadanie 8.10.** Prawdopodobieństwo, że cząsteczka gazu o temperaturze $T$ ma prędkość $v$ dane jest przez rozkład Maxwella

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}, \qquad v \geqslant 0,$$

gdzie $k$ jest stałą Boltzmanna, a $m$ – masą cząsteczki gazu. Znaleźć najbardziej prawdopodobną prędkość cząsteczki.

**Zadanie 8.11.** W metodzie Hückla orbitali molekularnych wartość energii orbitalnych elektronów $\pi$ dla etanu to punkty stacjonarne wyrażenia

$$E(c) = \alpha + 2\beta c\sqrt{1-c^2},$$

gdzie $\alpha$ i $\beta$ są stałymi, zwanymi *parametrami Hückla*. Znaleźć te punkty oraz odpowiadające im wartości energii.

**Zadanie 8.12.** Rozwinąć w szeregi Maclaurina następujące funkcje:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \cos x$;

(c) $f(x) = xe^{-x}$;

(d) $f(x) = \cos x^2$.

**Zadanie 8.13.** Zbadać przebieg zmienności funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$; (b) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$; (c) $f(x) = x\ln x$.

## Odpowiedzi

**Zadanie 8.1.** (a) $3x^2 - 4x + 7$; (b) $63x^6 - 15x^{-4} + 33x^{-12}$; (c) $5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 6$; (d) $x^{\frac{2}{3}}(1+\frac{5}{3}\ln x)$; (e) $\frac{-x^2+10x+3}{(x^2+3)^2}$; (f) $\frac{1}{\cos^2 x}$; (g) $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$; (h) $\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$; (i) $-3\sin 3x$; (j) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; (k) $\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$; (l) $\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}$; (m) $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; (n) $\frac{-2}{3\sqrt{1-[\frac{1}{3}(2x-1)]^2}}$; (o) $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$; (p) $-\frac{\sin x}{\cos x}$; (q) $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arccos 2x}$; (r) $\frac{2(1-x^2)}{|x^2-1|(x^2+1)}$; (s) $x^3e^{\sin x}(4+x\cos x)$; (t) $-\cos x\cdot e^{-\sin x}$; (u) $\frac{1}{x\ln x}$; (v) $\frac{3}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; (w) $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$; (x) $x^x(1+\ln x)$.

**Zadanie 8.2.** (a) $f'(x) = 6x-2$, $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$; (b) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$, $f''(x) = -2e^x\sin x$, $f'''(x) = -2e^x(\sin x+\cos x)$; (c) $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$; (d) $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}$, $f'''(x) = \frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$.

**Zadanie 8.3.** Wzory prostych stycznych w punktach o odciętych $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ oraz $x_3 = -1$ są równe odpowiednio: (a) $y = x$, $y = e^{-1}$, $y = 2ex + e$; (b) $y = x$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(3x-1)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(3x+1)$.

**Zadanie 8.4.** (a) w przedziale $(-\infty, 1)$ funkcja $f$ jest (ściśle) malejąca, w przedziale $(3, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) rosnąca; (b) w przedziale $(-\infty, -1)$ funkcja $f$ jest (ściśle) malejąca, w przedziale $(-1, 1)$ funkcja $f$ jest (ściśle) rosnąca, w przedziale $(1, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) malejąca; (c) w przedziale $(0, e^{-2})$ funkcja $f$ jest (ściśle) malejąca, w przedziale $(e^{-2}, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) rosnąca.

**Zadanie 8.5.** (a) w $x_1 = -1$ funkcja $f$ ma minimum lokalne $f(-1) = -1$, w $x_2 = 0$ funkcja $f$ ma maksimum lokalne $f(0) = 0$, w $x_3 = 1$ funkcja $f$ ma minimum lokalne $f(1) = -1$; (b) w $x_1 = e$ funkcja $f$ ma maksimum lokalne $f(e) = e^{-1}$; (c) w $x_1 = -2$ funkcja $f$ ma maksimum lokalne $f(-2) = -2$, w $x_2 = 2$ funkcja $f$ ma minimum lokalne $f(2) = 2$.

**Zadanie 8.6.** (a) w przedziale $(-\infty, 2)$ funkcja $f$ jest (ściśle) wypukła, w przedziale $(2, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) wklęsła, w punkcie $x = 2$ wykres funkcji $f$ ma punkt przegięcia; (b) w przedziale $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ funkcja $f$ jest (ściśle) wypukła, w przedziale $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ funkcja $f$ jest (ściśle) wklęsła, w przedziale $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) wypukła, w punktach $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ wykres funkcji $f$ ma punkty przegięcia; (c) w przedziale $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ funkcja $f$ jest (ściśle) wklęsła, w przedziale $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$ funkcja $f$ jest (ściśle) wypukła, w punkcie $x = e^{-\frac{3}{2}}$ wykres funkcji $f$ ma punkt przegięcia.

**Zadanie 8.7.** (a) 1; (b) 1; (c) $\frac{9}{50}$; (d) 0; (e) $-1$; (f) 0; (g) 1; (h) 1; (i) $-\frac{1}{2}$; (j) 0; (k) $e^a$; (l) $e^3$.

**Zadanie 8.8.** Wymiary naczynia powinny wynosić $r = \pi$ cm oraz $h = \pi$ cm.

**Zadanie 8.9.** Wydajność tlenku azotu NO będzie maksymalna, gdy zawartość tlenu w mieszaninie będzie wynosić 50%.

**Zadanie 8.10.** Najbardziej prawdopodobną prędkością cząstki jest $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

**Zadanie 8.11.** Punkty stacjonarne: $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wartości energii: $E(c_1) = \alpha + \beta$, $E(c_2) = \alpha - \beta$.

**Zadanie 8.12.** (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n!)} x^{2n}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$.