2.4. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych

Definicja 2.13. Przez $\overline{\mathbb{R}}$ oznaczać będziemy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z dołączonymi dwoma elementami $+\infty$, $-\infty$, które nazywać będziemy *liczbami nieskończonymi*;

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Przyjmując, że dla każdej liczby rzeczywistej $x : -\infty < x < +\infty$ oraz, że $-\infty < +\infty$, rozszerzamy określoną w $\mathbb{R}$ relację porządku na zbiór $\overline{\mathbb{R}}$.

Zbiór $\mathbb{R}_+$ liczb rzeczywistych dodatnich wraz z dołączonym elementem $+\infty$ oznaczać będziemy przez $\overline{\mathbb{R}}_+$ (analogicznie $\overline{\mathbb{R}}_-$).

Niech E będzie niepustym i ograniczonym z góry podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$. Wiadomo, że wtedy istnieje $\sup E = s \in \mathbb{R}$. Jeżeli zbiór E nie jest ograniczony z góry, to przyjmujemy $\sup E = +\infty$, a zatem

$$(\sup E = +\infty) \Leftrightarrow \neg(\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in E \quad x \leqslant M) \Leftrightarrow (\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in E \quad x > M).$$

Analogiczna uwaga odnosi się do zbioru, który nie jest ograniczony z dołu.

Przyjmujemy następujące konwencje:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad (+\infty) - x = x - (-\infty) = +\infty, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (-\infty) - x = x - (+\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

$$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_{+} \quad x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty, \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_{+} \quad x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

$$\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_{-} \quad x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty, \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_{-} \quad x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty,$$

$$\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R} \quad \frac{+\infty}{x} = \frac{1}{x}(+\infty), \qquad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R} \quad \frac{-\infty}{x} = \frac{1}{x}(-\infty),$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \frac{x}{+\infty} = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \frac{x}{-\infty} = 0.$$

Uznajemy, że następujące działania są niewykonalne w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (+\infty) - (+\infty), \quad 0(+\infty), \quad 0(-\infty), \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty},$$

$$(-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty)0, \quad (-\infty)0, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}.$$