

ROZDZIAŁ 13

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

ZADANIA

Zadanie 13.1. Rozwiąż następujące równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych (lub sprowadzalne do takich równań):

(a) $2x^2y' - y = 0$;

(c) $e^y(1+x^2)y' = -2x(1+e^y)$;

(b) $y' = e^{3x+2y}$;

(d) $y' = 5x - 3y + 7$.

Zadanie 13.2. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego spełniające podane warunki początkowe:

(a) $y' = -2xy, y(0) = 3$;

(b) $(x+1)y' = y-1, y(2) = 4$.

Zadanie 13.3. Rozwiąż następujące równania liniowe pierwszego rzędu:

(a) $y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 0$;

(c) $xy' - y + x^2 = 0$;

(b) $y' + \frac{y}{x} = 3x$;

(d) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Zadanie 13.4. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego spełniające podane warunki początkowe:

(a) $y' - 2xy = x, y(0) = 0$;

(b) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$.

Zadanie 13.5. Znajdź rozwiązania następujących równań liniowych drugiego rzędu:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$;

(e) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

(b) $y'' - y' - 2y = 0$;

(f) $y'' - 2y' + y = 0$;

(c) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

(g) $y'' + y = 4e^x$;

(d) $y'' + 4y = 0$;

(h) $y'' - y = e^{2x}$.

Zadanie 13.6. Znaleźć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego spełniające podane warunki początkowe:

(a) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; (b) $y'' - y' = e^x$, $y(1) = 3e$, $y'(1) = 2e$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 13.1. (a) $y = Ce^{-\frac{1}{2x}}$; (b) $y = -\frac{1}{2}\ln(C - \frac{2}{3}e^{3x})$; (c) $y = \ln(\frac{C}{1+x^2} - 1)$;
(d) $15x - 9y + 16 = Ce^{-3x}$.

Zadanie 13.2. (a) $y = 3e^{-x^2}$; (b) $y = x + 2$.

Zadanie 13.3. (a) $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}}$; (b) $y = x^2 + \frac{C}{x}$; (c) $y = Cx - x^2$; (d) $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Zadanie 13.4. (a) $y = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$; (b) $y = \frac{2x-1}{x^3}$.

Zadanie 13.5. (a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$; (b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$; (c) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
(d) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$; (e) $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$; (f) $y = C_1e^x + C_2xe^x$;
(g) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x$; (h) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

Zadanie 13.6. (a) $y = e^x$; (b) $y = xe^x + 2e$.