Równania różniczkowe

Definicja. Równanie postaci $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, zawierające zmienną niezależną x, nieznaną funkcję y zmiennej x wraz z jej pochodnymi y', y'', ..., $y^{(n)}$, nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym.*

Przykładami równań różniczkowych są więc:

$$\begin{gathered}
y' = 2x, \\
y''' = y' - 3x^2, \\
y^{(5)} - (y')^3 + y - \sin x = 0, \\
e^{(y''')^4} - x^2 \cos(y'')^7 + 4xy = xe^x + \ln x.
\end{gathered}$$

Definicja. Rząd najwyższej pochodnej w równaniu różniczkowym nazywamy *rzędem równania.*

Równanie $y' = 2x$ jest więc równaniem rzędu pierwszego, a równanie $y^{(5)} - (y')^3 + y - \sin x = 0$ jest równaniem rzędu piątego.

Definicja. Funkcję $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, posiadającą ciągłe pochodne aż do n-tego rzędu włącznie, nazywamy *rozwiązaniem* równania różniczkowego na przedziale (a, b), gdy spełnia ona dane równanie dla każdej wartości $x \in (a, b)$.

Rozwiązanie równania nazwiemy *ogólnym*, gdy zawiera n niezależnych parametrów liczbowych C_1, C_2, ..., C_n. *Rozwiązanie szczególne* otrzymujemy z rozwiązania ogólnego ustalając wartości parametrów.

Uwaga. Podane powyżej definicje rozwiązań *nie* są ścisłe.

Przykład. Sprawdzimy, że funkcja $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$ jest rozwiązaniem $y'' - 25y = 0$.

Ponieważ

$$y'(x) = 5C_1 e^{5x} - 5C_2 e^{-5x} \quad \text{oraz} \quad y''(x) = 25C_1 e^{5x} + 25C_2 e^{-5x},$$

więc dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$y''(x) - 25y(x) = 25C_1 e^{5x} + 25C_2 e^{-5x} - 25(C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}) = 0.$$

A zatem funkcja $y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania $y'' - 25y = 0$ na $\mathbb{R}$.

Definicja. Zagadnienie wyznaczenia rozwiązania y równania różniczkowego, w którym funkcja y zmiennej x wraz ze swymi pochodnymi do rzędu $n-1$ włącznie przybiera z góry zadane wartości $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ przy danej wartości ξ zmiennej niezależnej x, tj.

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1},$$

nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego* lub *zagadnieniem początkowym.*

Przykład. Znaleźć rozwiązanie równania $y' = 2x$ spełniające warunek $y(2) = 5$.

Rozwiązanie ogólne równania $y' = 2x$ jest postaci $y(x) = x^2 + C$. By wyznaczyć rozwiązanie spełniające warunek $y(2) = 5$, podstawiamy $y = 5$ oraz $x = 2$ do wzoru na rozwiązanie ogólne. Mamy wtedy $5 = 4 + C$, skąd $C = 1$. Rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$y' = 2x, \qquad y(2) = 5$$

jest więc funkcja $y(x) = x^2 + 1$.

Definicja. Równanie postaci

$$y' = f(x)g(y),$$

gdzie f oraz g są funkcjami ciągłymi określonymi na pewnych przedziałach, nazywamy *równaniem o rozdzielonych zmiennych.*

Definicja. Równanie postaci

$$y' + p(x)y = q(x),$$

gdzie p i q są funkcjami ciągłymi określonymi na pewnym przedziale otwartym (a, b), nazywamy *równaniem liniowym rzędu pierwszego.* Jeżeli $q(x) = 0$, to równanie liniowe nazywamy *jednorodnym*, w przeciwnym przypadku równanie liniowe nazywamy *niejednorodnym.*

Definicja. Równanie postaci

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

gdzie a_1 oraz a_2 są liczbami rzeczywistymi, a f jest funkcją ciągłą określoną na pewnym przedziale (a, b), nazywamy *równaniem liniowym drugiego rzędu.* Jeżeli $f(x) = 0$, to równanie liniowe drugiego rzędu nazywamy *jednorodnym*, w przeciwnym przypadku równanie takie nazywamy *niejednorodnym.*

Definicja. Równanie

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania liniowego drugiego rzędu, a jego pierwiastki – *liczbami charakterystycznymi.*