Równanie o zmiennych rozdzielonych i równania do niego sprowadzalne

Zadanie 1.1. Znaleźć całkę ogólną równania oraz wydzielić krzywą całkową przechodzącą przez punkt $(0,0)$:

(a) $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$;

(b) $(y^2 + xy^2)\mathrm{d}x + (x^2 - yx^2)\mathrm{d}y = 0$.

Zadanie 1.2. Scałkować równanie:

(a) $x^2(1+y)\mathrm{d}x + (y-1)(x^3-1)\mathrm{d}y = 0$;

(b) $2y\sqrt{by-y^2} - (b^2+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, gdzie $b > 0$;

(c) $2x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$;

(d) $x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y - a = 0$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;

(e) $xy = (a+x)(b+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$;

(f) $x - y^2 + 2xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$;

(g) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 3$;

(h) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x - 2y + 1$;

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5x - 3y + 7$;

(j) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \sin 2(x-y)$;

(k) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y}{x-y}$;

(l) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$;

(m) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, gdzie $x > 0$ oraz $y > 0$;

(n) $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$;

(o) $(y + \sqrt{xy})\mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$, gdzie $x > 0$ i $y > 0$.

Zadanie 1.3. Znaleźć rozwiązanie równania całkowego Volterry

$$y(x) = 2 + \int_2^x \frac{1}{y(t)}\mathrm{d}t \qquad \text{dla } x \geqslant 2$$

w klasie funkcji ciągłych określonych na przedziale $[2, +\infty)$.

Odpowiedzi

W poniższych odpowiedziach nie uwzględniono zakresu zmienności stałej dowolnej C oraz obszaru określoności odpowiednich rozwiązań.

Zadanie 1.1. (a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + y = C$; $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + y = 0$;

(b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C$; $y(x) = 0$ dla $x \neq 0$; $x(y) = 0$ dla $y \neq 0$; przez punkt $(0,0)$ nie przechodzi żadna krzywa całkowa.

Zadanie 1.2. (a) $\frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + y - 2\ln|y+1| = C$; $x(y) = 1$ dla $y \neq -1$; $y(x) = -1$ dla $x \neq 1$;

(b) $y = b\Big[\Big(C - \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\Big)^2 + 1\Big]^{-1}$; $y(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$; $y(x) = b$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $y = C\exp\Big(-\frac{1}{2x}\Big)$; $x(y) = 0$ dla $y \neq 0$; $y(x) = 0$ dla $x \neq 0$;

(d) $y = a - C\exp\Big(\frac{1}{x}\Big)$; $x(y) = 0$ dla $y \neq a$; $y(x) = a$ dla $x \neq 0$;

(e) $x - y + C = \ln\big(|y|^b|x+a|^a\big)$; $y(x) = 0$ dla $x \neq -a$; $x(y) = -a$ dla $y \neq 0$;

(f) $\frac{y^2}{x} + \ln|x| = C$; $x(y) = 0$ dla $y \neq 0$; (wsk. podstawić $xz(x) = y^2(x)$);

(g) $y = Ce^x - x - 4$;

(h) $6x - 4y - 1 = Ce^{-2x}$;

(i) $15x - 9y + 16 = Ce^{-3x}$;

(j) $y = x - k\pi - \operatorname{arc\,tg} Ce^{2x}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$; $y = x - \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$;

(k) $\sqrt{x^2 + y^2} = C\exp\big(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\big)$;

(l) $y = x\ln|x| + Cx$; $x(y) = 0$ dla $y \neq 0$;

(m) $y = xe^{Cx+1}$;

(n) $\big(\sqrt{x} - \sqrt{y-x}\big)^2 = C$; $y(x) = x$ dla $x > 0$; $y(x) = 2x$ dla $x > 0$;

(o) $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln(Cx)$.

Zadanie 1.3. $y(x) = \sqrt{2x}$ dla $x \in [2, +\infty)$.