

Równanie zupełne i czynnik całkujący

Zadanie 3.1. Rozwiązać równanie:

(a) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$, gdzie $x > 0$;

(b) $(2xy - 1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$;

(c) $(2xy^{-1} + y^2x^{-2} + y - 1)dx + (-x^2y^{-2} - 2yx^{-1} + x + 1)dy = 0$, gdzie $x > 0$ oraz $y > 0$;

(d) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

Zadanie 3.2. Rozwiąż równanie

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0, \quad x > 0,$$

wiedząc, że czynnik całkujący dla danego równania zależy jedynie od zmiennej x , tj. $\mu = \mu(x)$.

Zadanie 3.3. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)dx - dy = 0,$$

wiedząc, że czynnik całkujący dla danego równania zależy od $x^2 - y$, tj. $\mu = \mu(x^2 - y)$.

Zadanie 3.4. Rozwiąż równanie

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0, \quad x > 0 \text{ oraz } y > 0$$

wiedząc, że czynnik całkujący dla danego równania zależy od iloczynu zmiennych, tj. $\mu = \mu(xy)$.

Zadanie 3.5. Rozwiąż równanie

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0, \quad y > 0,$$

wiedząc, że czynnik całkujący dla danego równania zależy tylko od zmiennej y , tj. $\mu = \mu(y)$.

Odpowiedzi

W poniższych odpowiedziach nie uwzględniono zakresu zmienności stałej dowolnej C oraz obszaru określoności odpowiednich rozwiązań.

Zadanie 3.1. (a) $(x^2 + y^2)^2 = C$;

(b) $x^2y - x + y^3 = C$;

(c) $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} + xy - x + y = C$;

(d) $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Zadanie 3.2. $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$; $y = x^2 - Cx$.

Zadanie 3.3. $\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$; $y = x^2 - \frac{1}{4}(C - x)^2$, $x \leq C$; $y = x^2$.

Zadanie 3.4. $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$; $x^2y^2 + 2 \ln \frac{x}{y} = C$.

Zadanie 3.5. $\mu(x, y) = y$; $x^2 - y^2 + 2xy = C$.