Rozdział 6

Szeregi

Teoria

<u>Warunek konieczny zbieżności:</u> Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Kryterium porównawcze:</u> Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_0$, gdzie N_0 jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Wówczas:

- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

<u>Kryterium Cauchy'ego:</u> Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny;
- jeżeli $\alpha = 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny lub rozbieżny.

<u>Kryterium d'Alemberta:</u> Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny;
- jeżeli $\alpha = 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny lub rozbieżny.

<u>Kryterium Leibniza:</u> Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg przemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

Zadania

Zadanie 6.7. Wykazać, że podane ciągi są zbieżne do zera:

(a) $\dfrac{2^n}{n!}$;

(b) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

Zadanie 6.8. Stosując warunek konieczny zbieżności, zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

Zadanie 6.9. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$.

Odpowiedzi

Zadanie 6.8. (a) rozbieżny; (b) rozbieżny.

Zadanie 6.9. (a) zbieżny; (b) rozbieżny; (c) zbieżny; (d) zbieżny; (e) zbieżny; (f) rozbieżny; (g) rozbieżny; (h) zbieżny; (i) zbieżny; (j) zbieżny; (k) zbieżny; (l) rozbieżny.