Układy liniowe równań różniczkowych

Zadanie 4.1. Rozwiązać równanie:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4x = 0;$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + 2z;$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y - 2z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3y + 4z;$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 5y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - 3y;$

(e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - 2z + 3,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y - z + 1;$

(f) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y - 2z + 2e^{-x},\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3y + 4z + e^{-x};$

(g) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + z + x;$

(h) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y - z - 5x + 1,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y + 2z + x - 1.$

Zadanie 4.2. Rozwiązać równanie:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - z,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -6x + 2y + 6z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 4x - y - 4z;$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + 12y - 4z,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - 3y + z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -x - 12y + 6z;$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x + 2y + 5z,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6x - y - 6z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -8x + 3y + 9z;$

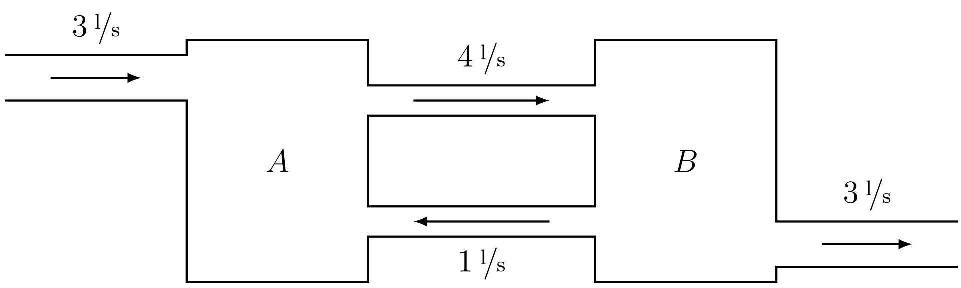
(d) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y + 6z,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y + 5z,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2z.$

Zadanie 4.3. Posługując się układami równań liniowych o stałych współczynnikach rozwiązać równanie liniowe drugiego rzędu:

(a) $y'' - y' + y = 0;$

(b) $y'' + 3y' + 2y = 0.$

Zadanie 4.4. Zbiornik A zawiera 50 l wody, w której rozpuszczono 25 dag soli kuchennej, zbiornik B zawiera natomiast 50 l czystej wody. Solanka pomiędzy zbiornikami, jak również do i z sieci wodociągowej pompowana jest w tempie wskazanym na poniższym rysunku. Wyznacz funkcje opisujące ilość soli znajdującej się w zbiornikach A i B w zależności od czasu.



Odpowiedzi

W poniższych odpowiedziach nie uwzględniono zakresu zmienności stałych dowolnych C_i oraz obszaru określoności odpowiednich rozwiązań.

Zadanie 4.1. (a) $x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$, $y = -2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t}$;

(b) $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x)$;

(c) $y = C_1e^x - 2C_2e^{2x}$, $z = -C_1e^x + 3C_2e^{2x}$;

(d) $x = -5e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = C_1e^{-t}(2\cos t + \sin t) + C_2e^{-t}(2\sin t - \cos t)$;

(e) $y = 1 + 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x$, $z = 2 + (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x$;

(f) $y = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2e^{2x}$, $z = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^{2x}$;

(g) $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{8} + C_1 + C_2e^{2x}$, $z = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{8} - C_1 + C_2e^{2x}$;

(h) $y = e^{3x}(C_1 + C_2x) + x$, $z = e^{3x}(C_1 + C_2x) - C_2e^{3x} - x$.

Zadanie 4.2. (a) $x = C_1e^{-t} + C_2(t+1) + C_3$, $y = -2C_1e^{-t} + 3C_2$, $z = 2C_1e^{-t} + C_2t + C_3$;

(b) $x = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}$, $y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$, $z = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$;

(c) $x = C_1e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t$, $y = -2C_1e^{2t} + 3C_2e^t$, $z = 2C_1e^{2t} + (C_2t + C_3)e^t$;

(d) $x = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3(5t^2 + 12t)e^{2t}$, $y = C_2e^{2t} + 10C_3te^{2t}$, $z = 2C_3e^{2t}$.

Zadanie 4.3. (a) $y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\Big[C_1 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}t + C_2 \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3}t\Big]$;

(b) $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$.

Zadanie 4.4. Jeżeli przez x_1 oraz x_2 oznaczymy funkcje, które opisują ilość soli odpowiednio w zbiorniku A i B w zależności od czasu, to otrzymamy układ równań różniczkowych

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{25}x_1 + \frac{1}{50}x_2, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.$$

z warunkami początkowymi $x_1(0) = 25$ oraz $x_2(0) = 0$. Stąd

$$x_1(t) = \frac{25}{2}e^{-\frac{1}{25}t} + \frac{25}{2}e^{-\frac{3}{25}t} \qquad \text{oraz} \qquad x_2(t) = 25e^{-\frac{1}{25}t} - 25e^{-\frac{3}{25}t}.$$