Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Marcin Borkowski, Daria Bugajewska, Dariusz Bugajewski,
Piotr Kasprzak

Wybrane zagadnienia analizy nieliniowej - zadania

Poznań 2015

Rozdział **1**

Twierdzenia o punktach stałych

Zadanie 1 ([10, s. 17, 1.6.3])**.** Niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem dowolnego, niepustego zbioru X w siebie. Uzasadnić, że jeśli $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ razy}}$ posiada dokładnie jeden punkt stały dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to wówczas f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Zadanie 2 ([10, s. 17, 1.6.1])**.** (a) Udowodnić, że założenie o zupełności w Zasadzie Kontrakcji Banacha nie może być pominięte.

(b) Udowodnić, że warunek „$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y), \alpha < 1$" w Zasadzie Kontrakcji Banacha nie może być osłabione przez warunek „$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ dla $x \neq y$".

Zadanie 3. Uzasadnić, że punkt (b) z poprzedniego zadania jest również prawdziwy w przypadku przestrzeni ograniczonej.

Zadanie 4 ([10, s. 17, 1.6.1])**.** Uzasadnić, że jeśli $\langle X, d\rangle$ jest zwartą przestrzenią metryczną oraz $f\colon X \to X$ spełnia nierówność $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ dla $x \neq y$, to f posiada jedyny punkt stały.

Zadanie 5 ([10, s. 18, 1.6.8])**.** Niech $\langle X, d\rangle$ be zupełną przestrzenią metryczną oraz niech $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem suriektywnym i rozszerzającym (to znaczy istnieje $\beta > 1$ takie, że $d(f(x), f(y)) \geqslant \beta d(x, y)$, dla $x, y \in X$). Uzasadnić, że f jest bijekcją oraz posiada jedyny punkt stały z taki, że $f^{-n}(u) := (f^{-1})^n(u) \to z$ dla każdego $u \in X$.

Zadanie 6. Udowodnić, że istnieje zwarta przestrzeń metryczna X, para punktów $a, b \in X$, stała $\alpha \in (0, 1)$ oraz odwzorowanie $f\colon X \to X$ nie posiadające punktów stałych i takie, że $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$, o ile $\{x, y\} \neq \{a, b\}$ oraz $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

Zadanie 7 ([10, s. 25, 2.2.1])**.** Niech odwzorowanie $K\colon [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłe oraz niech spełnia warunek Lipschitza względem trzeciej zmiennej: $|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leqslant \alpha|x - y|$ dla wszystkich $s, t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha \in (0, 1)$. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $v \in C[0, 1]$, nieliniowe równanie całkowe Volterry

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K\Big(t, s, u(s)\Big) ds, \qquad t \in [0, 1], \tag{7.1}$$

posiada jedyne rozwiązanie $u \in C[0,1]$. Ponadto, dla dowolnej funkcji $u_0 \in C[0,1]$, ciąg $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowany wzorami $u_n(t) := v(t) + \int_0^t K\Big(t, s, u_{n-1}(s)\Big)ds$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest zbieżny do tego rozwiązania, jednostajnie na przedziale $[0,1]$.

Zadanie 8 ([10, s. 2, 1.3.1])**.** Udowodnić, że dowolna kontrakcja $f\colon X \to X$, gdzie (X,d) jest przestrzenią metryczną, spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X\colon\ d(x, f(x)) < \delta \implies f(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon). \tag{8.1}$$

Zadanie 9 ([10, s. 12, 1.3.1])**.** (a) Udowodnić, że istnieje zupełna przestrzeń metryczna X oraz odwzorowanie $f\colon X \to X$ spełniające warunek (8.1), posiadające punkt stały, które nie jest ciągłe.

(b) Udowodnić, że dowolne odwzorowanie spełniające warunek (8.1) jest ciągłe w każdym swoim punkcie stałym.

Zadanie 10. Udowodnić, że dowolne odwzorowanie ciągłe $F\colon [0,1] \to [0,1]$ posiada punkt stały.

Zadanie 11. Udowodnić, że układ równań

$$\begin{cases} |xy| - x = 0 \\ 2y^2 - 1 = \sin(x+y) \end{cases} \tag{11.1}$$

posiada rozwiazanie.

Zadanie 12 ([15, s. 590])**.** Stosując twierdzenie Schaudera udowodnić, że domknięta kula jednostkowa $\overline{B}$ w przestrzeni $C([-1,1])$ nie jest zwarta.

Zadanie 13. Niech $X = C := [-1,1]$, $A := \{-1,1\}$ oraz niech funkcja $f\colon X \to C$ będzie określona wzorem $x \mapsto -x$. Udowodnić, że $f \in \mathcal{K}_A(X,C)$ oraz, że odwzorowanie f jest istotne.

Zadanie 14 ([10, s. 72, 4.9.34])**.** Niech $p\colon E \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją zdefiniowaną na przestrzeni unormowanej E taką, że $p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ oraz $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ dla $\lambda > 0$. Niech $C \subset E$ będzie zbiorem wypukłym, $U \subset C$ zbiorem otwartym takim, że $0 \in U$ oraz niech $f\colon \bar{U} \to C$ będzie odwzorowaniem zwartym. Załóżmy, że dla $x \in \partial U$ spełniony jest jeden z następujących warunków:

(a) $p(f(x)) \leqslant p(x)$;

(b) $p(f(x)) \leqslant p(f(x) - x)$;

(c) $p(f(x)) \leqslant \sqrt[k]{\Big(p(x)\Big)^k + \Big(p(f(x)-x)\Big)^k}$ dla pewnego $k > 1$.

Udowodnić, że odwzorowanie f posiada punkt stały.

Zadanie 15 ([10, s. 49, 3.8.16])**.** Niech X będzie przestrzenią posiadającą własność punktu stałego. Udowodnić, że każdy retrakt zawarty w X jest również przestrzenią z własnością punktu stałego.

Zadanie 16 ([10, s. 49, 3.8.19])**.** Udowodnić, że domknięta kula jednostkowa $\overline{B}$ w l^2 nie jest przestrzenią z własnością punktu stałego.

Rozdział 2

Miary niezwartości

Zadanie 17. (a) [10, s. 55, Dowód 4.2.3] Udowodnić, że jeśli podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest warunkowo zwarty, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset A$ taki, że $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(c_k, \varepsilon)$.

(b) Udowodnić, że niepusty podzbiór przestrzeni metrycznej zupełnej jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest on całkowicie ograniczony.

Zadanie 18. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni unormowanej oraz niech $\delta(\cdot)$ oznacza średnicę odpowiedniego zbioru. Sprawdzić, że:

(a) $\delta(\bar{A}) = \delta(A)$;

(b) $\delta(\lambda A) = |\lambda|\delta(A)$, gdzie λ jest elementem ciała skalarów;

(c) $\delta(\operatorname{conv} A) = \delta(A)$, gdzie $\operatorname{conv} A$ oznacza powlokę wypukła zbioru A.

Zadanie 19. Niech γ oznacza miarę niezwartości α lub β. Udowodnić, że dla dowolnych podzbiorów A, B przestrzeni Banacha E zachodzą własności 7^0, 8^0 i 9^0.

Zadanie 20. Sprawdzić, że metryka d w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ jest wyznaczona przez pewną normę $\|\cdot\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy metryka ta jest translacyjnie niezmiennicza i bezwzględnie jednorodna.

Zadanie 21. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ z metryką translacyjnie niezmienniczą d. Sprawdzić, że: $\delta(A + B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$ dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq V$.

Zadanie 22. Rozważmy na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ metrykę promienistą, która dla $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ zdefiniowana jest następującym wzorem:

$$d_p(z_1, z_2) = \begin{cases} \rho(z_1, z_2), & \text{jeżeli } \theta, z_1, z_2 \text{ są współliniowe,} \\ \rho(z_1, \theta) + \rho(z_2, \theta), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie ρ oznacza metrykę euklidesową oraz $\theta = (0, 0)$. Sprawdzić, że

(a) metryka d_p jest bezwzględnie jednorodna;

(b) przestrzeń metryczna $(\mathbb{R}^2, d_p)$ jest zupełna;

(c) metryka d_p nie pochodzi od normy;

(d) topologia wyznaczona przez metrykę d_p nie jest liniowa.

Zadanie 23. Rozważmy metrykę „rzeka”, która dla $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ zdefiniowana jest następującym wzorem:

$$d_r(v_1, v_2) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{gdy } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{gdy } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Sprawdzić, że:

(a) metryka d_r jest bezwzględnie jednorodna;

(b) metryka d_r nie pochodzi od normy;

(c) przestrzeń metryczna $(\mathbb{R}^2, d_r)$ jest zupełna;

(d) topologia wyznaczona przez metrykę d_r nie jest liniowa.

Zadanie 24. Uzasadnić, że topologia na $\mathbb{R}^2$ wyznaczona przez metrykę promienistą i metrykę „rzeka” nie są porównywalne.

Zadanie 25 ([8, s. 399, Example 1])**.** Niech funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem $f(x, y) := \left(\frac{x+1}{2}, y\right)$. Udowodnić, że f jest ciągła w metryce „rzeka”, ale nie w metryce promienistej.

Zadanie 26. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Wykazać, że f jest ciągła w metryce promienistej, ale nie w metryce „rzeka”.

Zadanie 27. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Pokazać, że miara niezwartości Kuratowskiego dowolnego niepustego podzbioru przestrzeni metrycznej (X, d), gdzie d jest metryką dyskretną, wyraża się następującym wzorem:

$$\alpha(A) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym}, \\ 0, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem skończonym}. \end{cases}$$

Zadanie 28. Uzasadnić, że:

(a) własności 4° oraz 8° miary α nie muszą być spełnione w przestrzeniach wektorowych z metryką, która nie jest bezwzględnie jednorodna;

(b) w przestrzeni wektorowej z metryką bezwzględnie jednorodną spełniona jest nierówność

$$h\alpha(A) \leqslant \alpha\left(\bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant h} \lambda A\right), \quad h \geqslant 0,$$

gdzie A jest dowolnym ograniczonym podzbiorem tej przestrzeni; stwierdzić, że nawet w takich przestrzeniach nierówność odwrotna nie musi zachodzić;

(c) własność 6° jest spełniona w przestrzeni wektorowej z metryką, która jest translacyjnie niezmiennicza, natomiast nie musi ona być spełniona w przestrzeniach wektorowych z metryką, która nie jest translacyjnie niezmiennicza;

(d) własność 7° nie musi być spełniona w przestrzeniach wektorowych z metryką, która bezwzględnie jednorodna ani w przestrzeniach wektorowych z metryką, która jest translacyjnie niezmiennicza.

Zadanie 29 ([7, s. 178, Theorem 2])**.** Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką „rzeka”. Niech D będzie jej ograniczonym podzbiorem. Wprowadźmy następujące oznaczenia.

- Mówimy, że liczba $y \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $A^*(D)$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele punktów w D, o parami różnych odciętych i rzędnych leżących w przedziale $(y - \varepsilon, y]$.
- Mówimy, że liczba $y \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $A_*(D)$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele punktów w D, o parami różnych odciętych i rzędnych leżących w przedziale $[y, y + \varepsilon)$.
- Niech $y^*(D)$ oznacza supremum wartości bezwzględnych liczb spełniających co najmniej jeden z powyższych warunków (lub zero, gdy nie istnieje ani jedna taka liczba).

(a) Udowodnić, że jeżeli nie istnieje liczba spełniająca choć jeden z warunków $A^*(D)$, $A_*(D)$, to zbiór D składa się ze skończenie wielu części, z których każda zawarta jest w pewnej prostej pionowej, a zatem jest on zwarty.

(b) Udowodnić, że w przeciwnym przypadku $\alpha(D) \geqslant 2y^*(D)$.

(c) Niech $R_{a,b}$, przy czym $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, będzie prostokątem $[a - b, a + b] \times [-b, b]$. Udowodnić, że $\alpha(R_{a,b}) = 2b$.

(d) Wykazać, że $\beta(D) \leqslant y^*(D)$.

(e) Wywnioskować stąd, że $\alpha(D) = 2y^*(D)$ oraz $\beta(D) = y * (D)$.

Zadanie 30 ([7, s. 179, Theorem 4])**.** Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką radialną. Niech D będzie jej ograniczonym podzbiorem. Wprowadźmy następujące oznaczenia.

- Mówimy, że liczba $w \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $W^*(D)$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele punktów v w D, spełniających warunek $w - \varepsilon < \|v\|_2 \leqslant w$ i leżących na parami różnych prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych.
- Mówimy, że liczba $w \in \mathbb{R}$ spełnia warunek $W_*(D)$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele punktów v w D, spełniających warunek $w \leqslant \|v\|_2 < w + \varepsilon$ i leżących na parami różnych prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych.
- Niech $w^*(D)$ oznacza supremum wartości bezwzględnych liczb spełniających co najmniej jeden z powyższych warunków (lub zero, gdy nie istnieje ani jedna taka liczba).

(a) Udowodnić, że jeżeli nie istnieje liczba spełniająca choć jeden z warunków $W^*(D)$, $W_*(D)$, to zbiór D składa się ze skończenie wielu części, z których każda zawarta jest w pewnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, a zatem jest on zwarty.

(b) Udowodnić, że w przeciwnym przypadku $\alpha(D) \geqslant 2w^*(D)$.

(c) Wykazać, że $\beta(D) \leqslant w^*(D)$.

(d) Wywnioskować stąd, że $\alpha(D) = 2w^*(D)$ oraz $\beta(D) = w^*(D)$.

Zadanie 31. Udowodnić lemat Ambrosettiego dla funkcji o wartościach w przestrzeni wektorowej z metryką translacyjnie niezmienniczą, to jest pokazać, że jeśli J jest zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, ρ), V jest przestrzenią wektorową z metryką translacyjnie niezmienniczą d, a H jest jednakowo ciągłą i wspólnie ograniczoną rodziną funkcji $h\colon J \to V$, to $\alpha\left(H(J)\right) = \max_{t\in J} \alpha(H(t))$, gdzie $H(J) = \{h(J) : h \in H\}$ oraz $H(t) = \{h(t) : h \in H\}$ dla $t \in J$.

Zadanie 32 ([13, s. 174, Ćwiczenie 8])**.** Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenie Cantora. Niech F_t, $t \in T$, będzie rodziną zbiorów domkniętych w przestrzeni metrycznej zupełnej spełniającą następujące warunki:

(i) przekrój skończonej liczby zbiorów F_t jest niepusty;

(ii) $\inf_{t\in T} \alpha(F_t) = 0$.

Wówczas $\bigcap_{t\in T} F_t \neq \emptyset$.

Zadanie 33. Podać przykład odwzorowania, które spełnia założenia twierdzenia Sadowskiego o punkcie stałym, ale nie spełnia założeń twierdzenia Darbo.

Rozdział **3**

Przestrzenie metryczne hiperwypukłe

Zadanie 34 ([11, s. 394, Uwaga po Definition 2.3]). Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wykazać równoważność następujących warunków:

(a) przestrzeń X jest całkowicie wypukła,

(b) jeżeli $d(x, y) = r + s$, to kule domknięte $\overline{B}(x, r)$ i $\overline{B}(y, s)$ przecinają się,

(c) jeżeli $d(x, y) \leqslant r + s$, to kule domknięte $\overline{B}(x, r)$ i $\overline{B}(y, s)$ przecinają się.

Zadanie 35 ([2, s. 407, Remark 1]). Wykazać, że jeżeli $T\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym z przestrzeni całkowicie wypukłej X do przestrzeni metrycznej Y, to jego minimalny moduł ciągłości jest subaddytywny.

Zadanie 36 ([5, s. 20, Lemma 3.1.14]). Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $A \subset X$ i $B \subset Y$ będą zbiorami niepustymi oraz $T\colon X \to B$ będzie odwzorowaniem o module ciągłości ω. Wykazać, że istnieje maksymalne rozszerzenie $\tilde{T}$ odwzorowania T, mające ten sam moduł ciągłości i odwzorowujące każdy punkt spoza dziedziny odwzorowania T w zbiór B.

Zadanie 37 ([5, s. 31, Proposition 4.2.5]). Udowodnić, że jeżeli A jest podzbiorem przestrzeni całkowicie wypukłej X, $x \in X \setminus A$ oraz $a \in A$ jest taki, że $d(x, a) = d(x, A)$, to a leży na brzegu zbioru A.

Zadanie 38 ([5, s. 30, Example 4.1.1]). Wykazać, że każdy przedział domknięty prostej rzeczywistej jest hiperwypukły.

Zadanie 39. Sprawdzić, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową jest hiperwypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$.

Zadanie 40 ([5, s. 17]). Wykazać, że jeżeli przestrzeń metryczna jest hiperwypukła, to ma własność (P), ale niekoniecznie na odwrót.

Zadanie 41 ([16, s. 66, Remark 1.2]). Wykazać, że hiperwypukłość przestrzeni X jest równoważna następującej własności: dla dowolnej funkcji $r\colon X \to [0, +\infty)$ spełniającej nierówność $d(x, y) \leqslant r(x) + r(y)$ dla dowolnych $x, y \in X$, istnieje taki punkt $z \in X$, że $d(x, z) \leqslant r(x)$ dla każdego $x \in X$.

Zadanie 42 ([5, s. 30, Proposition 4.1.2]). Wykazać, że każda przestrzeń hiperwypukła jest zupełna.

Zadanie 43. Udowodnić, że każdy podzbiór ograniczony A w przestrzeni hiperwypukłej jest zawarty w pewnej kuli o promieniu $\frac{1}{2}\operatorname{diam} A$.

Zadanie 44 ([5, s. 34, Example 4.3.1]). Sprawdzić, że część wspólna dwóch zbiorów hiperwypukłych nie musi być hiperwypukła.

Zadanie 45 ([5, s. 26, Theorem 3.2.5]). Udowodnić, że retrakt nierozszerzający przestrzeni hiperwypukłej jest hiperwypukły.

Zadanie 46 ([5, s. 26, Example 3.2.6]). Wykazać, że obraz przestrzeni hiperwypukłej w odwzorowaniu nierozszerzającym nie musi być hiperwypukły.

Zadanie 47 ([5, s. 39, Remark 4.3.9]). Podać przykład łańcucha przestrzeni hiperwypukłych o pustym przekroju.

Zadanie 48 ([5, s. 41, Theorem 4.4.1]). Wykazać, że produkt dwóch przestrzeni hiperwypukłych z metryką „maksimum" jest przestrzenią hiperwypukłą.

Zadanie 49 ([5, s. 50, Theorem 4.5.8]). Podać przykład podprzestrzeni liniowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z normą „maksimum", która nie jest hiperwypukła.

Zadanie 50 ([5, s. 55, Example 4.6.4]). Udowodnić, że odcinek metryczny jest powłoką hiperwypukłą przestrzeni dwupunktowej.

Zadanie 51 ([9, s. 334, 1.16]). Skonstruować powłokę hiperwypukłą przestrzeni trzypunktowej.

Zadanie 52 ([5, s. 63, Example 4.6.21]). Udowodnić, że powłoką hiperwypukłą c_0 w l^∞ jest cała przestrzeń l^∞.

Zadanie 53 ([5, s. 76, Corollary 5.2.3]). Udowodnić, że ciągłe odwzorowanie przestrzeni hiperwypukłej zwartej w siebie ma punkt stały.

Zadanie 54 ([11, s. 397, Uwaga po Definition 3.4]). Udowodnić, że niepusty przekrój zbiorów dopuszczalnych jest dopuszczalny.

Zadanie 55 ([11, s. 398, Theorem 3.10]). Udowodnić, że dopuszczalny podzbiór przestrzeni hiperwypukłej H jest hiperwypukły.

Zadanie 56 ([5, s. 41, Proposition 4.2.6]). Udowodnić, że jeżeli A jest dopuszczalnym podzbiorem przestrzeni hiperwypukłej H, to każdy punkt przestrzeni H ma punkt najbliższy w A.

Zadanie 57 ([5, s. 43, Proposition 4.2.10]). Niech H będzie przestrzenią hiperwypukłą, $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{B}(x_\lambda, r_\lambda)$ będzie zbiorem dopuszczalnym oraz $r > 0$. Wykazać, że wówczas $\bigcup_{x\in A} \overline{B}(x, r) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{B}(x_\lambda, r_\lambda + r)$.

Zadanie 58 ([5, s. 36, Lemma 4.3.7]). Udowodnić, że część wspólna łańcucha dopuszczalnych podzbiorów przestrzeni hiperwypukłej jest niepusta.

Rozdział **4**

Funkcje o ograniczonej wariacji

Zadanie 59 ([1, Proposition 1.3(d), p. 56])**.** Wykazać, że jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, to jest ona ograniczona oraz $\|f\|_\infty \leqslant |f(a)| + \operatorname{var}(f;[a,b])$.

Zadanie 60 ([1, Proposition 1.3(a), p. 56])**.** Wykazać, że jeśli $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, to również $f+g$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana oraz zachodzi nierówność $\operatorname{var}(f+g;[a,b]) \leqslant \operatorname{var}(f;[a,b]) + \operatorname{var}(g;[a,b])$.

Zadanie 61 ([1, Proposition 1.3(e), p. 56])**.** Pokazać, że każda funkcja monotoniczna $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ posiada ograniczoną wariację w sensie Jordana oraz $\operatorname{var}(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.

Zadanie 62 ([1, Proposition 1.10, p. 62])**.** Pokazać, że jeśli $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, to

$$\operatorname{var}(fg;[a,b]) \leqslant \|f\|_\infty \operatorname{var}(g;[a,b]) + \|g\|_\infty \operatorname{var}(f;[a,b]).$$

Zadanie 63 ([1, Proposition 1.3(g), p. 56])**.** Pokazać, że wariacja w sensie Jordana jest funkcją addytywną przedziału, to jest zachodzi następująca równość

$$\operatorname{var}(f;[a,b]) = \operatorname{var}(f;[a,c]) + \operatorname{var}(f;[c,b]),\ c \in [a,b],$$

gdzie $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana.

Zadanie 64 ([1, Exercise 1.1, p. 104])**.** Pokazać, że jeżeli funkcje $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana i ponadto $m := \inf_{x\in[a,b]}|g(x)| > 0$, to iloraz f/g jest także funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana.

Zadanie 65 ([12, p. 60])**.** Pokazać, że jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza[1], to ma ona ograniczoną wariację w sensie Jordana, przy czym $\operatorname{var}(f;[a,b]) \leqslant L(b-a)$. Czy każda funkcja o ograniczonej wariacji w sensie Jordana musi spełniać warunek Lipschitza?

[1] Przypomnijmy, że funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, gdy istnieje taka stała $L \geqslant 0$, że $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|$ dla dowolnych $x, y \in [a,b]$. Zauważmy, iż funkcje spełniające warunek Lipschitza są jednostajnie ciągłe.

Zadanie 66 ([1, Exercise 1.3, p. 104])**.** Pokazać, że jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, to również $|f|$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana oraz zachodzi nierówność

$$\mathrm{var}(|f|;[a,b]) \leqslant \mathrm{var}(f;[a,b]).$$

Zadanie 67 ([1, Exercise 1.4, p. 104])**.** Podać przykład funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ o nieograniczonej wariacji w sensie Jordana takiej, że $|f|$ jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana.

Zadanie 68 ([1, Example 1.4, p. 58])**.** Podać przykład funkcji o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, która nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.

Zadanie 69 ([14, Exercise 2.3, p. 41])**.** Pokazać, że jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1, to

$$\mathrm{var}(f;[a,b]) = \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t. \tag{69.1}$$

Zadanie 70 ([12, p. 61])**.** Niech $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz niech $c \in \mathbb{R}$. Obliczyć wariację w sensie Jordana funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Zadanie 71. Rozważmy funkcję $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0, \\ x^3 \sin\frac{1}{x}, & \text{jeżeli } x \in (0,1]. \end{cases}$$

Pokazać, że $\frac{2}{3} \leqslant \mathrm{var}(f;[0,1]) \leqslant \frac{3}{2}$.

Zadanie 72 ([1, Example 1.8])**.** Pokazać, że funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \in (0,1], \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

jest ciągła, ale $f \notin BV[0,1]$.

Zadanie 73 ([1, Exercise 1.15])**.** Dla danej funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ niech $v_f(x) = \mathrm{var}(f;[a,x])$ dla $x \in [a,b]$. Wyznacz wzór funkcji v_f, jeżeli $f(x) = \sin x$ oraz $[a,b] = [0,2\pi]$.

Zadanie 74 ([6, Example 4])**.** Podać przykład funkcji spełniającej warunek Höldera[2] z wykładnikiem $\frac{1}{2}$, która nie jest funkcją o ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Czy istnieją funkcje spełniające warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in [0,1]$, które są funkcjami o ograniczonej wariacji w sensie Jordana, ale nie są funkcjami stałymi?

[2]Przypomnijmy, że funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha \in [0,1]$, gdy istnieje taka stała $L > 0$, że $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha$ dla $x,y \in [a,b]$.

Rozdział **5**

Funkcje prawieokresowe

Zadanie 75 ([3, Zadanie 85, p. 42])**.** Pokazać, że jeżeli istnieje taka liczba $a \neq 0$, że

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \tag{75.1}$$

gdzie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, to f jest funkcją okresową.

Zadanie 76 (por. [3, Zadanie 35, p. 111] lub [4, Exercise 5.16])**.** Pokazać, że jedynym nietrywialnym[1] rozwiązaniem następującego równania funkcyjnego

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(x)f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{76.1}$$

w klasie funkcji ograniczonych i dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na $\mathbb{R}$ jest $f(x) = \cos ax$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera.

Zadanie 77. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową. Pokazać, że jeżeli f jest różniczkowalna, to pochodna f' jest także funkcją okresową. Czy funkcja pierwotna ciągłej funkcji okresowej jest funkcją okresową?

Zadanie 78 ([3, Zadanie 259, p. 124] lub [12, p. 119])**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą (lokalnie całkowalną) i okresową o okresie $\omega > 0$. Pokazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$\int_a^{a+n\omega} f(s)\mathrm{d}s = n\int_0^{\omega} f(s)\mathrm{d}s.$$

Zadanie 79 ([18, Remark, p. 88])**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła funkcją okresową o okresie $\omega > 0$. Uzasadnić, że

$$M(f) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(s)\mathrm{d}s.$$

Zadanie 80. Pokazać, że zbiór względnie gęsty można w sposób równoważny zdefiniować przy pomocy zarówno przedziałów domkniętych jak i otwartych.

Zadanie 81 ([17, p. 23] lub [18, Example, p. 20])**.** Zbadać, który z następujących podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych jest względnie gęsty:

[1]Przypomnijmy, że rozwiązanie nazywamy nietrywialnym, gdy jest ono różne od funkcji stałej.

(a) $A = \{\pm k^2 : k \in \mathbb{N}_0\}$; (b) $B = \{\pm k^{\frac{1}{2}} : k \in \mathbb{N}_0\}$.

Zadanie 82 (por. [17, Przykład 1.1])**.** Pokazać, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \cos\alpha x + \cos\beta x$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ są niewspółmierne, jest prawieokresowa, ale nie jest okresowa.

Zadanie 83 (por. [18, Proposition 3, p. 26])**.** Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją prawieokresową. Pokazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $\|f\|_\infty = \sup_{x \geqslant a}|f(x)|$. Wywnioskować z tego, że jeżeli funkcja prawieokresowa zbiega do zera, gdy $x \to +\infty$, tzn. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, to $f \equiv 0$.

Rozdział 6

Dodatek

Zadanie 84 ([10, s. 14, 1.4.1, oraz s. 15, 1.4.2]). (a) Udowodnić, że każda funkcja niemalejąca $f\colon [0,1] \to [0,1]$ posiada maksymalny punkt stały.

(b) Pokazać, że jeśli dodatkowo założymy ciągłość lewostronną, to wtedy istnieje minimalny punkt stały z_0 oraz $z_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(0)$.

Zadanie 85 ([10, s. 19, 1.6.26]). Niech $\langle P, \preceq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $\mathcal{F}$ będzie niepustą rodziną przemiennych izotonicznych odwzorowań zbioru P w siebie. Załóżmy, że istnieje $b \in P$ takie, że $b \preceq f(b)$ dla każdego $f \in \mathcal{F}$ i niech dowolny łańcuch $\{x \in P | b \preceq x\}$ posiada supremum. Udowodnić, że $\mathcal{F}$ posiada maksymalny punkt stały.

Zadanie 86 ([10, s. 19, 1.6.19]). Niech X, Y będą dwoma niepustymi zbiorami i niech $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ będą dwoma odwzorowaniami. Pokazać, że X i Y mogą być zapisane jako rozłączne sumy, $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, gdzie $f(X_1) = Y_1$ i $g(Y_2) = X_2$. Wywnioskować stąd twierdzenie Cantora–Bernsteina.

Zadanie 87 ([10, s. 169 oraz s. 34, 2.7.7]). Niech A będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni metrycznej X. Stosując twierdzenie Knastera–Tarskiego pokazać, że A zawiera maksymalny zbiór doskonały.

Zadanie 88 ([10, s. 34, 2.7.7]). Niech C będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta H oraz niech $f\colon C \to C$ będzie odwzorowaniem nierozszerzającym. Pokazać, że zbiór punktów stałych odwzorowania f jest wypukły (może być pusty).

Zadanie 89 ([10, s. 24, 2.1.6]). Niech $f\colon \overline{B} \to H$ będzie odwzorowaniem nierozszerzającym, określonym na kuli domkniętej zawartej w przestrzeni Hilberta H w tą przestrzeń. Pokazać, że jeśli $(x|f(x)) \leqslant \|x\|^2$ dla każdego $x \in \partial\overline{B}$, to wtedy f posiada punkt stały.

Zadanie 90. Podać przykład niezupełnej przestrzeni X z iloczynem skalarnym oraz odwzorowania nierozszerzającego $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$, gdzie $\overline{B}$ jest domkniętą kulą w X, takiego, że f nie ma punktów stałych.

Bibliografia

[1] J. Appell, J. Banaś i N. Merentes, *Bounded Variation and Around*, de Gruyter Studies in Nonlinear Analysis and Applications, no. 17, de Gruyter, Berlin, 2014.

[2] N. Aronszajn i P. Panitchpakdi, *Extension of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 405–439.

[3] J. Banaś i S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1993.

[4] P. Biler i A. Witkowski, *Zadania z gwiazdką z analizy: 5. Równania funkcyjne. Funkcje wielu zmiennych*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 1986.

[5] M. Borkowski, *Theory of Hyperconvex Metric Spaces. A Beginner's Guide*, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Juliusz Schauder Centre for Nonlinear Studies, Toruń, 2015.

[6] D. Bugajewski, J. Gulgowski i P. Kasprzak, *On integral operators and nonlinear integral equations in the spaces of functions of bounded variation*, J. Math. Anal. Appl., doi:10.1016/j.jmaa.2016.06.014.

[7] D. Bugajewski i E. Grzelaczyk, *On the measures of noncompactness in some metric spaces*, New Zealand J. Math. **27** (1998), 177-182.

[8] D. Bugajewski i E. Grzelaczyk, *A fixed point theorem in hyperconvex spaces*, Arch. Math. (Basel) **75** (2000), 395–400.

[9] A. Dress, *Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: a note on combinatorial properties of metric spaces*, Advances in Mathematics **53** (1984), 321–402.

[10] J. Dugundji i A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol. I, PWN, Warszawa, 1982.

[11] R. Espínola i M. A. Khamsi, *Introduction to Hyperconvex Spaces*, Handbook on Metric Fixed Point Theory (W. A. Kirk and B. Sims, eds.), Kluwer Academic Publisher, Dortrecht, 391-435, 2001.

[12] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, Tom 3*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.

[13] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1980.

[14] G. Leoni, *A First Course in Sobilev Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 105, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

[15] P. Mankiewicz, K. Maurin i M. Skwarczyński, *Analiza funkcjonalna*, w: Leksykon Matematyczny, 1993.

[16] B. Piątek, *On the gluing of hyperconvex metrics and diversities*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. **13** (2014), 65–76.

[17] S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.

[18] S. Zaidman, *Almost-periodic Functions in Abstract Spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 126, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melbourne, 1985.