Rozdział 11

Rachunek różniczkowy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

Zadania

Zadanie 11.1. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeżeli

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{e^{2x} - e^y}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$;

(d) $f(x,y) = \ln\big[x\ln(y-x)\big]$.

Odpowiedź przedstaw również w postaci graficznej.

Zadanie 11.2. Wyznacz zbiór punktów nieciągłości następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{dla } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Zadanie 11.3. Niech $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Pokaż, że

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0,$$

ale nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Zadanie 11.4. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = x - 4y$;

(b) $f(x,y) = x^3y - y^3x$;

(c) $f(x,y) = (5x^2y - y^3 + 7)^3$;

(d) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$;

(e) $f(x,y) = x\sqrt{y} + yx^{-\frac{1}{3}}$;

(f) $f(x,y) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)$;

(g) $f(x,y) = ye^{x+xy}$;

(h) $f(x,y) = x^2e^{x-3y}$.

Zadanie 11.5. Wykaż, że funkcja $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ spełnia równanie cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$.

Zadanie 11.6. Oblicz pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$;

(c) $f(x,y) = x^2\sin^2 y$;

(d) $f(x,y) = y\ln x + x^2\ln y$.

Zadanie 11.7. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pokazać, że $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Zadanie 11.8. Oblicz gradient oraz podaj postać różniczki funkcji f w punkcie x_0, jeżeli:

(a) $f(x,y) = \sin(2x+y)$ oraz $x_0 = (0,\pi)$;

(b) $f(x,y) = x\cos(\pi y) + y^2e^x$ oraz $x_0 = (0,1)$;

(c) $f(x,y,z) = x^2yz + xy$ oraz $x_0 = (1,0,1)$;

(d) $f(x,y,z) = x^3ye^z + y\ln x + z + 3$ oraz $x_0 = (1,2,0)$.

Zadanie 11.9. Oblicz pochodne kierunkowe funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora u:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ oraz $x_0 = (2,1)$, $u = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$;

(b) $f(x,y) = e^x \sin y$ oraz $x_0 = (0, \frac{\pi}{2})$, $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;

(c) $f(x,y,z) = x + y^2 + xyz^3$ oraz $x_0 = (1,1,-1)$, $u = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$;

(d) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 1)$ oraz $x_0 = (0,1,2)$, $u = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$.

Zadanie 11.10. Znaleźć ekstrema lokalne następujących funkcji:

(a) $f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x - y$;

(b) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$;

(c) $f(x,y) = x^2 + y^4$;

(d) $f(x,y) = x + \dfrac{1}{x} + y^2$;

(e) $f(x,y) = (y^2 + 4x)e^{2x}$;

(f) $f(x,y) = 16\ln(y + 2x) - 8x - y^2$;

(g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy$;

(h) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;

(i) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^3 + 2x + 6yz$.

Zadanie 11.11. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze D, jeżeli

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, a D jest trójkątem, ograniczonym prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$;

(b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$, a D jest prostokątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$, $(0,2)$;

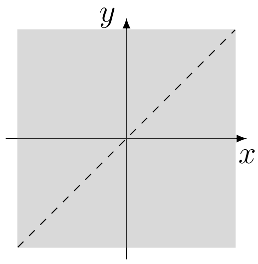
(c) $f(x,y) = 2xy$, a D jest kołem o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{2}$.

Zadanie 11.12. Firma chce produkować prostopadłościenne pudełka o objętości $2000\ \mathrm{cm}^3$. Materiał na spód kosztuje trzy razy więcej niż materiał na boki i wierzch. Jakie winny być wymiary pudełka, aby zminimalizować koszt materiału potrzebnego na jego wykonanie?

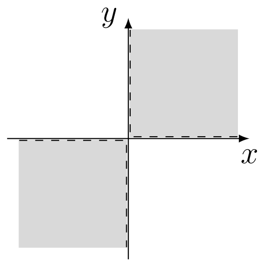
Odpowiedzi

Zadanie 11.1.

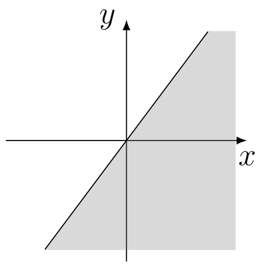
(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$



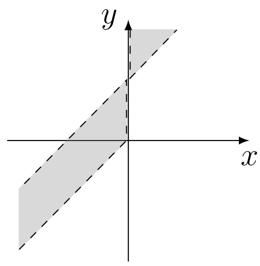
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$



(b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \geq y\}$



(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ i } y - x > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ i } 0 < y - x < 1\}$



Zadanie 11.2. (a) $\emptyset$; (b) $\{(0,0)\}$; (c) $\emptyset$; (d) $\{(0,0)\}$.

Zadanie 11.4. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4$; (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 3y^2x$; (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(5x^2 - 3y^2)(5x^2y - y^3 + 7)^2$; (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \ln y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy + y\ln y}$; (e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{y} - \frac{1}{3}yx^{-\frac{4}{3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} + x^{-\frac{1}{3}}$; (f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$; (g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+y)e^{x+xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1+xy)e^{x+xy}$; (h) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+2x)e^{x-3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2e^{x-3y}$;

Zadanie 11.6. (a) $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 4y$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}(x,y) = -4x$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = 6$; (b) $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = -4y(x+y)^{-3}$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 2(x-y)(x+y)^{-3}$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = 4x(x+y)^{-3}$; (c) $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin^2 y$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x\sin 2y$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2\cos 2y$; (d) $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y}{x^2} + 2\ln y$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{y}$, $\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$.

Zadanie 11.8. (a) $\nabla f(0,\pi) = (-2,-1)$, $df(0,\pi)(h_1,h_2) = -2h_1 - h_2$; (b) $\nabla f(0,1) = (0,2)$, $df(0,1)(h_1,h_2) = 2h_2$; (c) $\nabla f(1,0,1) = (0,2,0)$, $df(1,0,1)(h_1,h_2,h_3) = 2h_2$, (d) $\nabla f(1,2,0) = (8,1,3)$, $df(1,2,0)(h_1,h_2,h_3) = 8h_1 + h_2 + 3h_3$.

Zadanie 11.9. (a) $\partial_u f(2,1) = -4$; (b) $\partial_u f(0,\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$; (c) $\partial_u f(1,1,-1) = \frac{5}{3}$; (d) $\partial_u f(0,1,2) = \frac{12}{25}$.

Zadanie 11.10. (a) w punkcie $(1, 0)$ funkcja f ma maksimum lokalne równe $f(1, 0) = 1$; (b) f nie posiada ekstremów lokalnych; (c) w punkcie $(0, 0)$ funkcja f ma minimum lokalne równe $f(0, 0) = 0$; (d) w punkcie $(1, 0)$ funkcja f ma minimum lokale równe $f(1, 0) = 2$; (e) w punkcie $(-\frac{1}{2}, 0)$ funkcja f ma minimum lokale równe $f(-\frac{1}{2}, 0) = -2e^{-1}$; (f) w punkcie $(1, 2)$ funkcja f ma maksimum lokale równe $f(1, 2) = 16 \ln 4 - 12$; (g) w punkcie $(2, -2)$ funkcja f ma minimum lokale równe $f(2, -2) = -16$, w punkcie $(-2, -2)$ funkcja f ma maksimum lokale równe $f(-2, -2) = 16$; (h) w punkcie $(1, -1, 3)$ funkcja f ma minimum lokale równe $f(1, -1, 3) = -11$; (i) w punkcie $(1, 18, 6)$ funkcja f ma maksimum lokale równe $f(1, 18, 6) = 109$.

Zadanie 11.11. (a) funkcja f przyjmuje wartość największą równą 6 w dwóch punktach: $(-3, 0)$ oraz $(0, -3)$, a wartość najmniejszą równą -1 w punkcie $(-1, -1)$; (b) funkcja f przyjmuje wartość największą równą 9 w punkcie $(3, 0)$, a wartość najmniejszą równą 0 w dwóch punktach $(0, 0)$ oraz $(2, 2)$; (c) funkcja f przyjmuje wartość największą równą 2 w dwóch punktach: $(-1, -1)$ oraz $(1, 1)$, a wartość najmniejszą równą -2 w punktach $(1, -1)$ oraz $(-1, 1)$.

Zadanie 11.12. Długość pudełka: 10 cm, szerokość pudełka: 10 cm, wysokość pudełka: 20 cm.