

ROZDZIAŁ 12

RACHUNEK CAŁKOWY W PRZESTRZENI \mathbb{R}^n

ZADANIA

Zadanie 12.1. Oblicz następujące całki iterowane:

(a) $\int_0^4 \left(\int_4^{12} xy dy \right) dx;$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos \phi}^1 r^2 dr \right) d\phi;$

(b) $\int_0^1 \left(\int_x^{2x} (x - y + 1) dy \right) dx;$

(e) $\int_0^1 \left(\int_0^u e^{\frac{w}{u}} dw \right) du;$

(c) $\int_0^1 \left(\int_t^{10t} \sqrt{st - t^2} ds \right) dt;$

(f) $\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(\int_0^2 (4 + z) dz \right) dy \right) dx.$

Zadanie 12.2. Oblicz następujące całki podwójne:

(a) $\iint_D (x - 3y^2) dx dy$, gdzie $D = [0, 2] \times [1, 2]$;

(b) $\iint_D y \sin(xy) dx dy$, gdzie $D = [1, 2] \times [0, \pi]$;

(c) $\iint_D (x + 2y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = 2x^2$ oraz $y = 1 + x^2$;

(d) $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x - 1$ oraz $y^2 = 2x + 6$;

(e) $\iint_D (x + y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ oraz $y + x = 3$;

(f) $\iint_D dx dy$, gdzie D trójkątem o wierzchołkach $A(1, 3)$, $B(-1, -1)$ oraz $C(2, -4)$.

Zadanie 12.3. Dokonując zamiany kolejności całkowania, oblicz:

$$(a) \int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) dy \right) dx; \quad (b) \int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy.$$

Zadanie 12.4. Oblicz poniższe całki, wykorzystując zamianę zmiennych:

- (a) $\iint_D y dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y^2 = 4 - 4x$, $y^2 = 4 + 4x$ oraz $y \geq 0$; PODSTAWIENIE: $x(u, w) = u^2 - w^2$ oraz $y(u, w) = 2uw$;
- (b) $\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy$, gdzie D jest trapezem o wierzchołkach $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ oraz $(0, -1)$; PODSTAWIENIE: $x(u, w) = \frac{1}{2}(u + w)$ oraz $y(u, w) = \frac{1}{2}(u - w)$;
- (c) $\iint_D xy dx dy$, gdzie D jest kołem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 3; PODSTAWIENIE: $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ oraz $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$;
- (d) $\iint_D (3x+4y) dx dy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach: $x^2+y^2 = 1$ oraz $x^2 + y^2 = 4$, gdzie $y \geq 0$; PODSTAWIENIE: $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ oraz $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$.

Zadanie 12.5. Wykorzystując całki podwójne, oblicz pole figury ograniczonej krzywymi o równaniach:

- (a) $3x^2 = 25y$ oraz $5y^2 = 9x$;
- (b) $x + y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = 0$ oraz $x - 2y = 0$.

Zadanie 12.6. Wykorzystując całki podwójne, oblicz objętość brył ograniczonych powierzchniami:

- (a) $x + 2y - z = 0$, $y = x$, $y = x^4$ oraz $z = 0$;
- (b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $x + y + z = 1$.

Zadanie 12.7. Oblicz następujące całki potrójne:

- (a) $\iiint_V (1 - x + y) dx dy dz$, gdzie V jest sześcianem ograniczonym powierzchniami $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ oraz $z = \pm 1$;
- (b) $\iiint_V (2x + 3y - z) dx dy dz$, gdzie V jest graniastosłupem ograniczonym powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ oraz $x + y = 2$;
- (c) $\iiint_V z dx dy dz$, gdzie V jest czworościanem ograniczonym powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $x + y + z = 1$;
- (d) $\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną stożkiem $4z^2 = x^2 + y^2$ oraz płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$ oraz $z = 1$, przy czym $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Zadanie 12.8. Oblicz następujące całki potrójne, stosując podstawienie walcowe: $x(r, \varphi, h) = r \cos \varphi$, $y(r, \varphi, h) = r \sin \varphi$ oraz $z(r, \varphi, h) = h$:

(a) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną walcem $x^2 + y^2 = 1$, paraboloidą $z = 1 - x^2 - y^2$ oraz płaszczyzną $z = 4$;

(b) $\iiint_V e^z \, dx \, dy \, dz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną paraboloidą $z = 1 + x^2 + y^2$, walcem $x^2 + y^2 = 5$ i płaszczyzną $z = 0$.

Zadanie 12.9. Wykorzystując całki potrójne, oblicz objętość brył ograniczonych powierzchniami o równaniach:

(a) $z = 1 + x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $x + y = 1$;

(b) $z = x^2 + y^2$ oraz $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Zadanie 12.10. Wyznacz środek ciężkości walca ograniczonego powierzchniami o równaniach $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ oraz $z = 3$, wiedząc, że jego gęstość jest wyrażona wzorem $\rho(x, y, z) = 2z$.

Zadanie 12.11. Wyznacz środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach $x = y^2$, $x = z$, $z = 0$ i $x = 1$, wiedząc, że jej gęstość jest wyrażona wzorem $\rho(x, y, z) = 14$.

ODPOWIEDZI

Zadanie 12.1. (a) 512; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 6; (d) $\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{9}$; (e) $\frac{1}{2}(e - 1)$; (f) $\frac{40}{3}$.

Zadanie 12.2. (a) -12; (b) 0; (c) $\frac{32}{15}$; (d) 36; (e) 9; (f) 9.

Zadanie 12.3. (a) $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$; (b) $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$.

Zadanie 12.4. (a) 2; (b) $\frac{3}{4}(e - e^{-1})$; (c) 0; (d) $\frac{56}{3}$.

Zadanie 12.5. (a) 5; (b) $\frac{2}{3}$.

Zadanie 12.6. (a) $\frac{7}{18}$; (b) $\frac{1}{6}$.

Zadanie 12.7. (a) 8; (b) 11; (c) $\frac{1}{24}$; (d) $\frac{4}{9}$.

Zadanie 12.8. (a) $\frac{12}{5}\pi$; (b) $\pi(e^6 - e - 5)$.

Zadanie 12.9. (a) $\frac{5}{6}$; (b) 162π .

Zadanie 12.10. (0, 0, 2)

Zadanie 12.11. $(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14})$