2.4. Czynnik całkujący

Definicja 2.5. Jeżeli funkcja $\mu = \mu(x, y)$ ma tę własność, że po pomnożeniu przez nią obu stron równania (2.17) stanie się ono równaniem różniczkowym zupełnym, tj. takim, że

$$\mu(x, y)M(x, y)\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}U(x, y),$$

to μ nazywamy *czynnikiem całkującym*, a funkcję U – odpowiadającą mu całką równania (2.17). Całka ogólna równania (2.17) dana jest równością (2.18).

Zakładamy, że funkcje M i N są ciągłe wraz ze wszystkimi pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu w pewnym obszarze jednospójnym i że w żadnym punkcie tego obszaru nie zerują się jednocześnie. O funkcji μ zakładamy, że się nie zeruje i że ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Załóżmy teraz, że μ jest czynnikiem całkującym równania (2.17). Stosując (2.19) otrzymujemy

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

a stąd

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

czyli

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \tag{2.27}$$

Równanie (2.27) jest równaniem cząstkowym pierwszego rzędu z szukaną funkcją μ. Zadanie rozwiązania równania (2.17) jest więc równoważne rozwiązaniu równania (2.27). Okazuje się, że w pewnych przypadkach można łatwo znaleźć rozwiązanie równania (2.27) i tym samym czynnik całkujący równania (2.17).

Załóżmy, że czynnik całkujący jest funkcją danej funkcji $\omega(x, y)$ zmiennych x i y, tj. $\mu = \mu(\omega(x, y))$. Wtedy równanie (2.27) możemy zapisać w postaci

$$N \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu(\omega)$$

lub (jeżeli $N\omega_x' - M\omega_y' \neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Jeżeli

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega),$$

to

$$\mu(\omega) = \exp\left(\int \psi(\omega)\, \mathrm{d}\omega \right) \equiv f(\omega) = f(\omega(x, y)) \tag{2.28}$$

(dla prostoty przyjmujemy $C = 1$). W szczególności dla istnienia czynnika całkującego postaci $\mu = \mu(x)$ konieczne jest, aby

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x).$$

Jeżeli natomiast czynnik całkujący zależy tylko od y, tj. $\mu = \mu(y)$, to równanie (2.28) przybiera postać

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y).$$

Uwaga 2.7. Znając czynnik całkujący równania (2.17) możemy wyznaczyć jego rozwiązania osobliwe. Niech $\mu = \mu(x, y)$ będzie czynnikiem całkującym równania (2.17), tj.

$$\mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U$$

dla pewnej funkcji U. Wówczas

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \frac{1}{\mu}\mathrm{d}U,$$

a zatem równanie (2.17) można zapisać w postaci

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{d}U = 0,$$

czyli

$$\mathrm{d}U = 0 \qquad \text{lub} \qquad \frac{1}{\mu} = 0.$$

Pierwsze z powyższych równań prowadzi do całki ogólnej $U = C$, drugie natomiast może prowadzić do rozwiązania osobliwego. Rozwiązaniem osobliwym równania (2.17) może być tylko to rozwiązanie, wzdłuż którego czynnik całkujący przyjmuje wartość nieskończoną (tj. $+\infty$ lub $-\infty$). Aby upewnić się, że znalezione rozwiązanie jest osobliwe można np. sprawdzić, czy zawiera się ono w rozwiązaniu ogólnym. Jeżeli nie zawiera się, to jest ono osobliwe.