3.3. Podstawowe twierdzenia

Podstawowym twierdzeniem egzystencjalnym (tj. twierdzeniem orzekającym o istnieniu rozwiązania) dla zagadnienia Cauchy'ego dla równania (1.3), lub ogólniej dla układu (3.4), jest twierdzenie Peano. Sformułujemy je dla dwóch przypadków: najpierw dla $(n+1)$-wymiarowego prostokąta, a następnie dla $(n+1)$-wymiarowego pasa.

Twierdzenie 3.1. *Niech* $I{:=}[x_0 - a, x_0 + a]$ *i* $B{:=}\{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - y_i^{(0)}| \leqslant b,\ i = 1, \ldots, n\}$, *gdzie* a, b *są danymi liczbami dodatnimi. Załóżmy, że* $f\colon I \times B \to \mathbb{R}^n$ *jest funkcją ciągłą. Niech* $M{:=}\max\{\|f(x,y)\| : (x,y) \in I \times B\}$, $d{:=}\min(a, bM^{-1})$ (*oczywiście przyjmujemy tutaj, że* M *jest liczbą dodatnią*) *oraz* $J{:=}[x_0 - d, x_0 + d]$. *Wówczas układ* (3.4) *posiada co najmniej jedno rozwiązanie* $y = \phi(x)$, *określone na przedziale* J *i spełniające warunek początkowy* $y = y_0$ *dla* $x = x_0$.

Twierdzenie 3.2. *Niech w zbiorze* $I \times \mathbb{R}^n$, *gdzie* $I{:=}[x_0 - a, x_0 + a]$ *oraz* $a > 0$, *będzie określona ciągła i ograniczona funkcja* f *o wartościach w* $\mathbb{R}^n$. *Wtedy istnieje określone na* I *rozwiązanie układu* (3.4), *spełniające warunek początkowy* $y(x_0) = y_0$.

Szczególnie ważne w teorii równań różniczkowych jest twierdzenie o istnieniu i jedyności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla układu (3.4) (twierdzenie Picarda lub Twierdzenie Picarda–Lindelöfa). Podobnie jak powyżej sformułujemy je w dwóch przypadkach.

Twierdzenie 3.3. *Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 3.1 załóżmy dodatkowo, że funkcja* f *spełnia następujący warunek Lipschitza:*

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leqslant L\,\|y - z\|\,,$$

gdzie L *jest stałą dodatnią,* $x \in I$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *i* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *są dowolnymi punktami z* B. *Wówczas układ* (3.4) *posiada jednoznaczne rozwiązanie* $y = \varphi(x)$, *określone na przedziale* J *i spełniające warunek początkowy* (3.6).

Twierdzenie 3.4. *Przy założeniach (bez ograniczoności) i oznaczaniach Twierdzenia 3.2 załóżmy ponadto, że funkcja f spełnia powyższy warunek Lipschitza, w którym y, $z \in \mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje określone na I dokładnie jedno rozwiązanie układu* (3.4), *spełniające warunek początkowy* (3.6).