Przykład 1.4. Rozważmy przewód elektryczny wiszący między dwoma słupami. Naszym celem jest wyznaczenie równania różniczkowego, które wyznacza kształt, jaki przyjmie wiszący przewód.

Zbadamy tylko fragment przewodu między najniższym punktem P_1 oraz dowolnym punktem P_2 (zob. Rysunek 1.2). Na przewód działają trzy siły: waga fragmentu P_1P_2, napięcia $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$ w przewodzie, odpowiednio w punktach P_1 i P_2. Jeżeli ω jest gęstością liniową oraz s jest długością fragmentu P_1P_2, to jego ciężar wynosi ωs.

Napięcie $\vec{T_2}$ rozkłada się na dwie składowe: równoległą $T_2 \cos\theta$ oraz prostopadłą $T_2 \sin\theta$. Ze względu na równowagę możemy napisać

$$T_1 = T_2 \cos\theta \qquad \text{oraz} \qquad \omega s = T_2 \sin\theta.$$

Stąd otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega s}{T_1} \qquad \text{lub} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\omega s}{T_1}. \tag{1.5}$$

Ponieważ długość łuki między punktami P_1 i P_2 wynosi

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

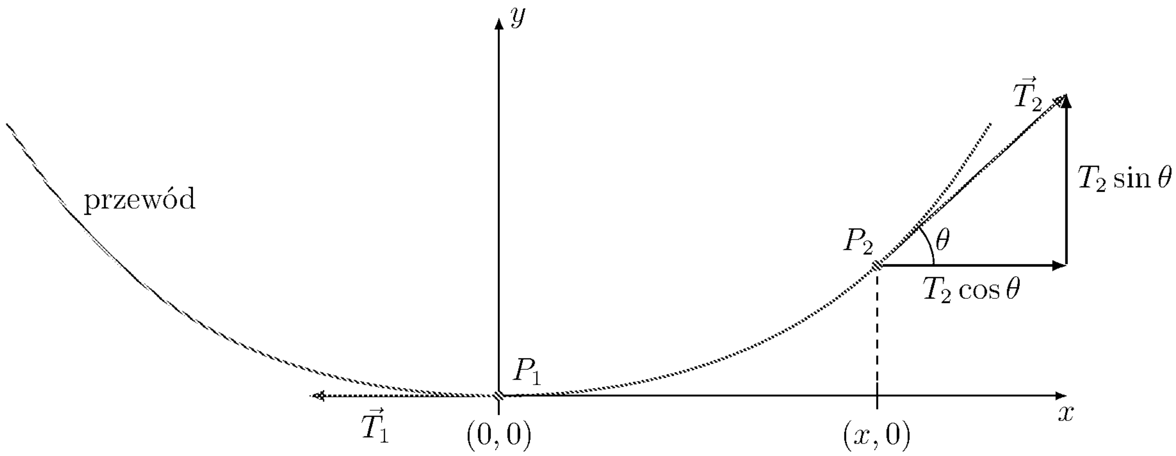
zatem

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{1.6}$$

Różniczkując obustronnie drugą z równości (1.5) względem x otrzymujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_1}\frac{ds}{dx} \qquad \text{lub} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

uwzględniając (1.6). Okazuje się, że przewód wiszący pod wpływem własnego ciężaru przyjmuje kształt cosinusa hiperbolicznego, lub linii łańcuchowej.



Rysunek 1.2: Fragment przewodu pomiędzy punktami P_1 i P_2.