

Równanie liniowe i równania do niego sprowadzalne

Zadanie 2.1. Rozwiązać równanie $y' - xy = 1$ metodą uzmienniania stałej.

Zadanie 2.2. Scałkować równanie

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x, \quad x > 0,$$

metodą Eulera i wyznaczyć krzywą całkową przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Zadanie 2.3. Rozwiązać równanie:

(a) $(x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0$, gdzie $y > 0$; (c) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1$;

(b) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$; (d) $y' + y = 2e^x$.

Zadanie 2.4. Okręt zmniejsza swą prędkość pod wpływem przeciwdziałającej jego ruchowi siły oporu wody. Siła ta jest wprost proporcjonalna do prędkości okrętu. Początkowa prędkość okrętu $v_0 = v(0) = 10$ m/s zmalała po czasie $t_1 = 5$ s do wartości $v_1 = v(t_1) = 8$ m/s. Kiedy prędkość okrętu zmniejszy się do 1 m/s?

Zadanie 2.5. Kulę żelazną nagrzaną do temperatury 400° C umieszczono w obszernym pomieszczeniu, w którym temperatura powietrza wynosi 20° C. Kula ta stygnie. Wiadomo, że prędkość wymiany ciepła między stygnącą kulą a powietrzem jest wprost proporcjonalna do różnicy ich temperatur. Po dziesięciu minutach temperatura kuli wynosi 200° C. Obliczyć temperaturę kuli po następnym dwudziestu minutach.

Zadanie 2.6. Wykazać, że równanie $y' + ay = P(x)$, w którym a jest stałą różną od zera, a P wielomianem stopnia m , ma rozwiązanie szczególne postaci $y_1 = Q(x)$, gdzie Q jest wielomianem stopnia m . Znaleźć ponadto rozwiązanie ogólne równania $y' + y = x + 1$, odgadując uprzednio jedno rozwiązanie szczególne.

Zadanie 2.7. Wykazać, że styczne do krzywych całkowych równania liniowego $y' + p(x)y = q(x)$, wystawione w punkcie przecięcia tych krzywych z prostą równoległą do osi Oy albo przecinają się w jednym punkcie, albo są równoległe.

Zadanie 2.8. Wykazać, że równanie liniowe $y' = ky + f(x)$, w którym k jest stałą różną od zera, a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją okresową o okresie $\omega > 0$ ma jedno rozwiązanie szczególne o tym samym okresie. Znaleźć to rozwiązanie.

Zadanie 2.9. Rozwiązać równanie:

(a) $(y^3 + x + 1)dx - 3y^2dy = 0$; (b) $\frac{xy'}{\sqrt{y}} = 4\sqrt{y} + 2x^2$, gdzie $y > 0$.

Zadanie 2.10. Znaleźć krzywą, w każdym punkcie której podnormalna jest średnia arytmetyczną kwadratów współrzędnych tego punktu.

Odpowiedzi

W poniższych odpowiedziach nie uwzględniono zakresu zmienności stałej dowolnej C oraz obszaru określoności odpowiednich rozwiązań.

Zadanie 2.1. $y = \left(C + \int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) e^{\frac{1}{2}x^2}$.

Zadanie 2.2. $y = x^2 + Cx^{-1}$ dla $x > 0$; krzywa całkowa przechodząca przez punkt $(1, 1)$ ma wzór $y = x^2$ dla $x > 0$.

Zadanie 2.3. (a) $x = y^2 + Cy^2 e^{\frac{1}{y}}$ dla $y > 0$;

(b) $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$;

(c) $y = (\arctg x + C)(1 + x^2)$;

(d) $y = e^x + Ce^{-x}$.

Zadanie 2.4. Prędkość okrętu zmniejszy się do 1 m/s po ok. 51,6 s.

Zadanie 2.5. Temperatura kuli żelaznej po 30 minutach będzie wynosić ok. 62° C.

Zadanie 2.6. $y = x + Ce^{-x}$.

Zadanie 2.8. $y(x) = \frac{e^{kx}}{1 - e^{k\omega}} \int_{x-\omega}^x f(t)e^{-kt} dt$.

Zadanie 2.9. (a) $y^3 = -x - 2 + Ce^x$;

(b) $y = x^4(\ln|x| + C)^2$;

Zadanie 2.10. $2yy' = x^2 + y^2$; $y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2$.