Rozdział 7

Równania liniowe rzędu *n* o stałych współczynnikach

Definicja 7.1. Równania liniowe (6.2) rzędu n, w którym $p_k(x) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ oraz funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b) nazywamy *równaniem liniowym rzędu n o stałych współczynnikach*. Jeżeli $f(x) \equiv 0$, to takie równanie nazywamy *jednorodnym*. Przybiera ono postać

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{7.1}$$

Definicja 7.2. Równanie

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{7.3}$$

nazywamy *równaniem charakterystycznym* równania (7.1) a jego pierwiastki *liczbami charakterystycznymi*.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne postaci

$$L(y) = f(x), \tag{7.8}$$

gdzie $L(y)$ jest zdefiniowane jak w (7.1). Okazuje się, że dla pewnych klas funkcji $f(x)$ można znaleźć rozwiązanie szczególne równania (7.8) za pomocą *metody współczynników nieoznaczonych*.

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie 7.3. *Załóżmy, że prawa strona równania* (7.8) *jest postaci* $P_m(x)e^{\alpha x}$*, gdzie*

$$P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \quad (m \geqslant 0)$$

jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych a α *jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wówczas równanie* (7.8) *posiada rozwiązanie szczególne postaci*

$$y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad \text{gdzie} \;\; Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m, \tag{7.9}$$

jeżeli $P(\alpha) \neq 0$*. Jeżeli natomiast* α *jest* k*-krotnym pierwiastkiem* $(k \geqslant 1)$ *równania charakterystycznego, to równanie* (7.8) *posiada rozwiązanie szczególne postaci*

$$y_1 = x^kQ_m(x)e^{\alpha x}, \tag{7.10}$$

gdzie $Q_m(x)$ *ma postać jak w* (7.9)*.*

Metodę czynników nieoznaczonych znajdowania rozwiązania szczególnego równania (7.8) można także zastosować w przypadku, gdy prawa strona tego równania jest postaci

$$f(x) = e^{\alpha x}\Big[P_m^{(1)}(x)\cos bx + P_m^{(2)}(x)\sin bx\Big], \tag{7.11}$$

gdzie $P_m^{(1)}(x)$, $P_m^{(2)}(x)$ są wielomianami zmiennej x stopnia nie większego niż m, przy czym przynajmniej jeden z nich ma stopień m.

Twierdzenie 7.4. *Jeżeli prawa strona równania* (7.8) *jest postaci* (7.11)*, to równanie to posiada rozwiązanie szczególne postaci*

$$y_1 = e^{\alpha x}\Big[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big],$$

gdzie $Q_m^{(1)}(x)$*,* $Q_m^{(2)}(x)$ *są wielomianami stopnia* m*, o ile* $P(\alpha + bi) \neq 0$*.*

Jeżeli natomiast $\alpha + bi$ *jest* k*-krotnym pierwiastkiem* $(k \geqslant 1)$ *równania charakterystycznego, to równanie* (7.8) *posiada rozwiązanie szczególne postaci*

$$y_1 = x^ke^{\alpha x}\Big[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx\Big],$$

gdzie $Q_m^{(1)}(x)$*,* $Q_m^{(2)}(x)$ *są wielomianami stopnia* m*.*