Równanie zupełne – dodatek

Załóżmy, że dane jest równanie zupełne

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1}$$

gdzie funkcje M i N są ciągłe względem obu zmiennych w pewnym prostokącie O (ograniczonym, bądź nie) i mają w nim ciągłe pochodne cząstkowe, odpowiednio względem y i x. Załóżmy ponadto, że w każdym punkcie tego obszaru funkcje te nie zerują się jednocześnie. Szukana funkcja U powinna zatem spełniać układ równań

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{2}$$

dla każej pary $(x,y) \in O$.

Całkując pierwsze z równań (2) względem zmiennej x, otrzymujemy

$$U(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y),$$

gdzie φ jest pewną funkcją zmiennej y klasy C^1. Różniczkując to równanie względem zmiennej y mamy

$$\varphi'_y(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x,$$

a zatem oznaczając

$$\psi(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x,$$

otrzymujemy całkę ogólną równania (1) w postaci

$$U(x,y) = \int M(x,y)\mathrm{d}x + \int \psi(y)\mathrm{d}y = C.$$

Analogicznie, wychodząc z drugiego z równań (2), całkę ogólną równania (1) można otrzymać w postaci

$$U(x,y) = \int N(x,y)\mathrm{d}y + \int \eta(x)\mathrm{d}x = C,$$

gdzie η jest pewną funkcją zmiennej x.