3.2. Układy równań różniczkowych zwyczajnych

Definicja 3.1. Zbiór zależności postaci

$$\begin{aligned} &F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ &F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie $y_1, y_2, \dots, y_n$ są szukanymi funkcjami zmienniej niezależniej x, nosi nazwę *układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.*

Jeżeli funkcje $F_1, F_2, \dots, F_n$ są takie, że układ (3.2) jest rozwiązalny względem pochodnych szukanej funkcji, to znaczy

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{3.3}$$

to taki układ nazywamy *układem normalnym równań różniczkowych.* Liczbę równań układu (3.3) nazywamy *rzędem* tego *układu.* Układ (3.3) możemy zapisać w postaci

$$y' = f(x, y) \tag{3.4}$$

gdzie $y{:=}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y'{:=}(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ oraz $f{:=}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Jeżeli prawe strony układu (3.3) zależą w sposób liniowy od szukanych funkcji $y_1, y_2, \ldots, y_n$, to znaczy jeżeli układ ten ma postać

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x),\\
\frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x),
\end{aligned}$$

gdzie p_{kl} $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ oraz f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ są danymi funkcjami zmiennej x, to układ ten nazywamy *układem liniowym równań różniczkowych* lub krótko *układem liniowym.* Jeżeli prawe strony układu (3.3) nie zależą w sposób jawny od zmiennej niezależnej x, to taki układ nazywamy *automorficznym* lub *stacjonarnym.*

Definicja 3.2. Każdy zbiór n funkcji

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x), \tag{3.5}$$

określonych i różniczkowalnych w sposób ciągły na przedziale (a, b), nazywamy rozwiązaniem układu (3.3) w tym przedziale, jeżeli zbiór ten zamienia wszystkie równania tego układu w tożamości prawdziwe dla wszystkich wartości x z przedziału (a, b).

Definicja 3.3. Zagadnienie wyznaczania rozwiązania (3.5) układu (3.4) spełniającego warunek:

$$y_1 = y_1^{(0)}, \quad y_2 = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n = y_n^{(0)} \quad \text{dla } x = x_0, \tag{3.6}$$

nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego* lub *zagadnieniem początkowym.* Liczby $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $\ldots$, $y_n^{(0)}$ nazywamy *wartościami początkowymi szukanych funkcji* lub *wartościami początkowymi rozwiązania* (3.5), liczbę x_0 *wartością początkową zmiennej niezależnej* x, liczby x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $\ldots$, $y_n^{(0)}$ razem wzięte – danymi *początkowymi rozwiązania* (3.5), a warunki (3.6) *warunkami początkowymi* tego *równania.*

Rozszerzymy teraz zasięg Definicji 1.7–1.9 na przypadek układu (3.4).

Definicja 3.4. Rozwiązanie $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ równania (3.4) nazywamy *jednoznacznym* na przedziale (a, b), jeśli dla każdego $x \in (a, b)$, przez punkt $(x, y(x))$ w dostatecznie małym jego otoczeniu „przechodzi" jedyne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego.

Definicja 3.5. Rozwiązanie równania (3.4), w każdym punkcie którego naruszona jest jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla tego układu, będziemy nazywali *rozwiązaniem osobliwym.*

Definicja 3.6. Oznaczmy przez D obszar w przestrzeni $n + 1$ zmiennych x, y_1, y_2, $\ldots$, y_n, w każdym punkcie którego istnieje i jest jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla układu (3.3). Zbiór n funkcji

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x_1, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned} \tag{3.7}$$

określonych w pewnym obszarze zmienności zmiennych x_1, C_1, C_2, ..., C_n i mających ciągłe pochodne cząstkowe względem x, będziemy nazywali *rozwiązaniem ogólnym układu* (3.3) w obszarze D, jeżeli układ (3.7) jest rozwiązalny względem stałych dowolnych C_1, C_2, ..., C_n w obszarze D tak, że dla dowolnych wartości x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ należących do obszaru D układ (3.7) określa wartości C_1, $C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ C_2 &= \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.8}$$

i jeżeli n funkcji (3.7) jest rozwiązaniem układu (3.3) dla wszystkich wartości stałych dowolnych C_1, C_2, ..., C_n otrzymanych ze wzorów (3.8), gdy punkt $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ „przebiega" obszar D.

Dodajmy jeszcze (por. Definicja 1.11), że rozwiązanie równania (3.4), które nie zawiera żadnych stałych dowolnych, nazywamy *rozwiązaniem szczególnym* tego *równania.*

Rozszerzymy teraz zakres pojęć wprowadzonych we wstępie do Paragrafu 2.3. Bez straty ogólności będziemy poniżej rozważali układy, dla których cały obszar istnienia i jednoznaczności jest identyczny z obszarem D określoności pewnego rozwiązania ogólnego.

Definicja 3.7. Funkcję $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ niebędącą stałą nazywamy *całką układu* (3.3), jeżeli przy zastąpieniu zmiennych y_1, ..., y_n dowolnym rozwiązaniem szczególnym tego układu staje się ona stałą.